

Нгуен Фу Туан, аспирант
В.И. Соколов, д-р техн. наук, проф.
Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет
г. Иркутск

УДК 621.06

СИНТЕЗ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАДАННОЙ НИЗШЕЙ ЧАСТОТОЙ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСА

Приведен анализ зависимости низшей частоты динамической системы второго порядка от масс и жесткостей. Построены графики низшей частоты от масс и жесткостей. Сформированы динамические системы второго порядка, имеющие низшую частоту собственных колебаний в заданном интервале.

Ключевые слова: колебания упругих систем, низшая частота, мгновенный импульс.

Nguyen Phu Tuan, P.G.
V.I. Sobolev, D. Sc. Engineering, Prof.

SYNTHESIS OF THE MULTIDIMENSIONAL SYSTEM WITH THE LOWEST FREQUENCY SETTING OF NATURAL OSCILLATIONS UNDER THE IMPULSE

The analysis of the lowest frequency of the second-order dynamic system dependence on the mass and stiffness is given in the article. The graphs with the lowest frequency of the masses and stiffness are found. Dynamic second-order system having the lowest frequency of oscillations in a given interval is formed.

Key words: vibrations of elastic systems, the lowest frequency, instantaneous pulse.

Низшие частоты и соответствующие формы собственных колебаний являются необходимыми и определяющими факторами в решении многих задач динамики [1]. К таковым можно отнести задачи обеспечения сейсмостойкости сооружений, виброизоляции систем различного назначения, конструирования упругих систем, подверженных импульсным воздействиям и т.д.

Для определения частот собственных колебаний необходимо решить характеристическое уравнение

$$|D - \lambda \cdot I| = 0,$$

где $\lambda_i = \omega_i^2, i = 1..n$; I – единичная матрица; $D = RM^{-1}$; M – матрица инерционных параметров; R – матрица жесткостей динамической модели.

Для системы с двумя степенями свободы уравнение $|D - \lambda \cdot I| = 0$ можно записать в виде [6]:

$$\lambda^2 - \lambda \left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} \right) + \frac{r_{11} r_{22}}{m_1 m_2} - \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2} = 0. \quad (1)$$

Поскольку уравнение (1) имеет два положительных решения [5], то, по закону Виетта, справедливо:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} > 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 = \frac{r_{11} r_{22}}{m_1 m_2} - \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2} > 0 \end{cases}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} > 0 \\ \frac{r_{11} r_{22}}{m_1 m_2} - r_{12}^2 > 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где λ_1, λ_2 – решения уравнения (1) ($\lambda_1 < \lambda_2$).

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} - \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right);$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} + \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right).$$

Поскольку $\lambda_1 = \omega_1^2$, то

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} - \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)}. \quad (3)$$

На основе выражения (3) и условия (2) построим график зависимости ω_1 от m_1, m_2 в Mathcad [4]. При этом фиксируем значения жесткостей (рис. 1).

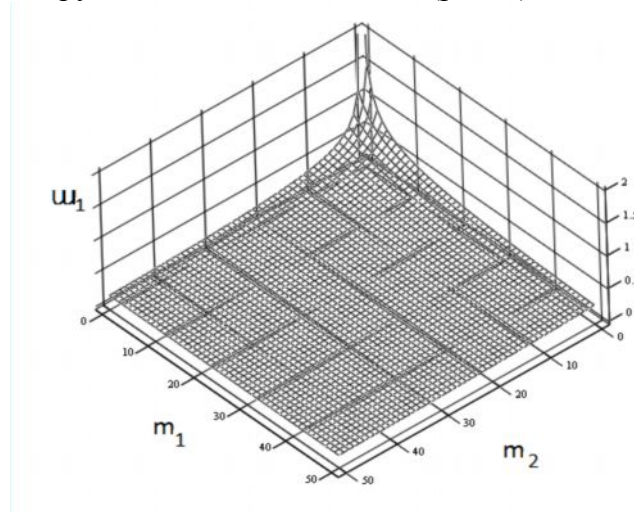


Рис. 1. График функции ω_1 от масс

Из графика видно, что при фиксированных значениях жесткостных параметров величина низшей частоты неограниченно возрастает при уменьшении m_1, m_2 . В точке $(m_1 = 0, m_2 = 0)$ производная равна бесконечности. При удалении от точки $(0,0)$ производные $\frac{\partial \omega_1}{\partial m_1}$ и $\frac{\partial \omega_1}{\partial m_2}$ уменьшаются. Значения ω_1 асимптотически стремятся к нулю при возрастании значе-

ний m_1, m_2 . Экстремальные значения на всей области m_1, m_2 отсутствуют.

Для анализа зависимости ω_1 от r_{11} и r_{22} рассмотрим ограничения функции ω_1 от r_{11} и r_{22} , то есть находим асимптотическую зависимость функции m_1 и m_2 [2,3].

$$\lim_{r_{11} \rightarrow \infty} \omega_1 = \lim_{r_{11} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} - \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)}.$$

Умножить выражение в корне на $\left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} + \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)$.

Получим

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{r_{11} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} - \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right) \cdot \left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} + \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)}{\left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} + \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)}} \\
 &= \lim_{r_{11} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 - \left(\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2} \right)}{\left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} + \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)}} \\
 &= \lim_{r_{11} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4 \frac{r_{22}}{m_2} \frac{1}{m_1} - 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{r_{11} \cdot m_1 \cdot m_2}}{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{r_{22}}{r_{11} \cdot m_2} + \sqrt{\left(\frac{1}{m_1} - \frac{r_{22}}{r_{11} \cdot m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{r_{11}^2 \cdot m_1 m_2}} \right)}} \\
 &= \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{r_{22}}{m_2} \frac{1}{m_1}}{\left(\frac{2}{m_1} \right)}} = \sqrt{\frac{r_{22}}{m_2}}. \tag{4}
 \end{aligned}$$

Аналогично находим асимптотическое равенство функции ω_1 от r_{22}

$$\begin{aligned}
 \lim_{r_{22} \rightarrow \infty} \omega_1 &= \lim_{r_{22} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} - \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)}{\left(\frac{r_{11}}{m_1} + \frac{r_{22}}{m_2} + \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{r_{22}}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{m_1 m_2}} \right)}} \\
 &= \lim_{r_{11} \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{4 \frac{r_{11}}{m_2} \frac{1}{m_1} - 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{r_{22} \cdot m_1 \cdot m_2}}{\left(\frac{r_{11}}{r_{22} \cdot m_1} + \frac{1}{m_2} + \sqrt{\left(\frac{r_{11}}{m_1} - \frac{1}{m_2} \right)^2 + 4 \cdot \frac{r_{12}^2}{r_{22}^2 \cdot m_1 m_2}} \right)}} \\
 &= \sqrt{\frac{r_{11}}{m_1}}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

На основе выражения (3) и условия (2) построим график $u_1(m_1, m_2)$. При этом фиксируем массы и значения параметра r_{12} .

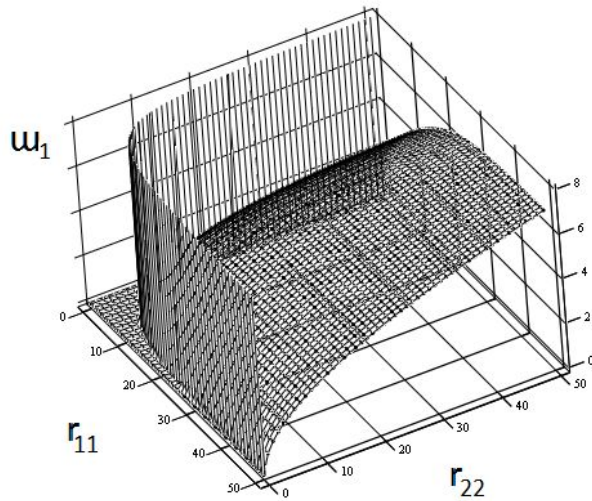


Рис. 2. График зависимости ω_1 от r_{11} и r_{22}

График зависимости ω_1 от r_{11} и r_{22} (рис. 2) является вогнутой поверхностью. Значения нижней частоты ограничивают до значения $\sqrt{\frac{r_{22}}{m_2}}$ (4) при изменении r_{11} , и до значения $\sqrt{\frac{r_{11}}{m_1}}$ (5) при изменении r_{22} .

Условия (2) для переменной r_{11} имеет вид
$$\begin{cases} \frac{r_{22}}{m_2} > \frac{-r_{11}}{m_1} \\ \sqrt{r_{11}r_{22}} > |r_{12}| \end{cases}.$$

На основе выражения (3) и условия (2) построим график зависимости ω_1 от r_{12} (рис. 3). При этом фиксируем массы и значения параметров r_{11} и r_{22} .

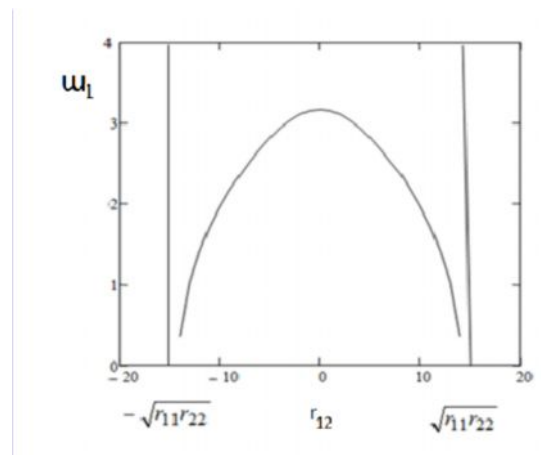


Рис. 3. График зависимости ω_1 от r_{12}

На графике показано, что максимальное значение ω_1 достигается $\sqrt{\frac{r_{22}}{m_2}}$ при $r_{12} = 0$.

Диапазон выбора r_{12} должно быть $[-\sqrt{r_{11}r_{22}}; \sqrt{r_{11}r_{22}}]$.

Выводы

1. При увеличении масс низшая частота собственных колебаний уменьшается.
2. При увеличении $r_{ij}, i \neq j$ низшая частота собственных колебаний увеличивается до значения $\sqrt{\frac{r_{ij}}{m_i}}$.
3. Низшая частота собственных колебаний достигает значения $\min_i \left(\sqrt{\frac{r_{ij}}{m_i}} \right)$.

Библиография

1. *Гайджуров П.П.* Методы, алгоритмы и программы расчета стержневых систем на устойчивость и колебаний: учеб. пособие. – Новочеркасск: Изд-во ЮРГТУ, 2010. – 230 с.
2. *Де Брэйи Н.Г.* Асимптотические методы в анализе. – М.: [Иностранная литература](#), 1961. – 248 с.
3. *Зорич В.А.* [Математический анализ](#): учебник. Ч. II. – М: Наука, 1984. – 640 с.
4. *Лаврентик А.И., Тузенко О.А.* Mathcad: конспект лекций. – Мариуполь: Изд-во ПГТУ, 2010. – 114 с.
5. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – 7-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 608 с.: ил.
6. *Соболев В.И., Нгуен Фу Туан.* Конечномерные аппроксимации в моделировании собственных колебаний упругих систем при воздействии мгновенного импульса // Вестник ИрГТУ. – 2012. – Т. 9. – С. 51–54.

Bibliography

1. *Gaydzhurov P.P.* Methods, algorithms and software for stability and vibration calculation of the framed systems. – Novocherkassk: SRSTU, 2010. – 230 p.
2. *De Bruijn N.G.* Asymptotic methods in analysis. – M.: Inostrannaya literatura, 1961. – 248 p.
3. *Zorich V.A.* [Mathematical analysis](#). P. II: Textbook. – M.: Nauka, 1984. – 640 p.
4. *Lavrentik A.I., Tuzenko O.A.* Mathcad: lecture notes – Mariupol: Perm State Technical University, 2010. – 114 p.
5. *Pismenyj D.T.* Lectures on higher mathematics: a complete course. – 7th ed. – M.: Iris Press, 2008. – 608 p.: il.
6. *Sobolev V.I., Nguyen Phu Tuan.* Finite-dimensional approximations in the modeling of natural oscillations of elastic systems under the influence of momentary impulse // ISTU Bulletin. – 2012. – Vol. 9. – P. 51–54.