

А.А. Иодчик, ст. преподаватель, e-mail: [Minos@mail.khstu.ru](mailto:Minos@mail.khstu.ru)  
В.А. Кравчук, д-р техн. наук, проф., e-mail: [Kravchuk@mail.khstu.ru](mailto:Kravchuk@mail.khstu.ru)  
Тихоокеанский государственный университет, г. Хабаровск

УДК 624.074.415.624.072.2

## ПРОГИБЫ СТАЛЬНОЙ БАЛКИ, ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ИЗГИБОМ ТАВРА

Одним из методов проектирования эффективных металлических балок является создание в них предварительных напряжений, обратных по знаку напряжения от внешней нагрузки. При этом в балках возникает обратный выгиб, противоположный прогибу от внешней нагрузки, что существенно уменьшает величину суммарного прогиба балки по сравнению с обычными металлическими балками.

**Ключевые слова:** предварительное напряжение, исходный тавр, обратный выгиб, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, прогиб от действия внешней нагрузки, суммарный прогиб балки.

A.A. Iodchik, senior lecturer  
V.A. Kravchuk, D. Sc. Engineering, Prof.

## STEEL BEAM DEFLECTION, PRESTRESSED BY T-BEAM BEND

One of the methods for the design of effective metal beams is to prestress them by reverse to the sign of stresses of the external load. Thus, the reverse bend occurs in the beams, opposite to the deflection of the external load, which significantly reduces the amount of the total deflection of the beam as compared with conventional metallic beams.

**Key words:** prestressing, the original t-beam, reverse camber, the differential equation of the bent axis of a beam, deflection from the action of external forces, the total deflection of a beam.

Предварительно напряженная стальная двутавровая балка изготавливается путем присоединения к изгибаемому тавру, сваренному из стенки и пояса, второго поясного листа. На начальной стадии тавр изгибается двумя сосредоточенными силами  $P$ , так что по сечению элемента возникает зона чистого сдвига и чистого изгиба. При этом балка получает выгиб  $f_{0t}$  (рис. 1а).

Для решения задачи по нахождению величины прогиба балки на стадии изготовления воспользуемся дифференциальным уравнением изогнутой оси балки:  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI_{xt}}$ .

Значения изгибающего момента балки будут равны:

при  $x < a$ ;  $M_x = Px$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI_{xt}} \int M_x dx = -\frac{1}{EI_{xt}} \int Pxdx = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{Px^2}{2} + C_1 \right); \quad (1)$$

$$y = -\frac{1}{EI_{xt}} \int \left( \frac{Px^2}{2} + C_1 \right) dx = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{Px^3}{6} + C_1x + D_1 \right). \quad (2)$$

При  $x > a$ ;  $M_x = Px - P(x-a)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI_{xt}} \int [P_x - P(x-a)] dx = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{Px^2}{2} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2 \right), \quad (3)$$

$$y = -\frac{1}{EI_{xt}} \int \left( \frac{Px^2}{2} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2 \right) dx = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{Px^2}{2} - \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2x + D_2 \right). \quad (4)$$

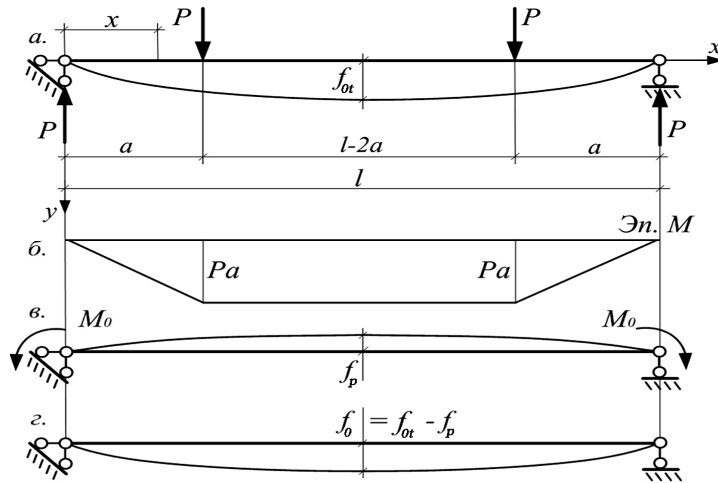


Рис. 1. Прогиб балки на стадии предварительного напряжения:

- а – схема загрузки и начальный выгиб исходного тавра на стадии изготовления балки;
- б – эпюра изгибающих моментов на стадии изготовления балки; в – изгибающий момент и прогиб двутавра после снятия усилия предварительного напряжения;
- г – результирующий выгиб двутавра на стадии предварительного напряжения

Принимаем граничные условия  $x = 0$ ;  $y = 0$ . При условии  $x < a$ ,  $D_1 = 0$ .

Постоянная интегрирования  $D_1$  характеризует прогиб оси стержня. Поскольку прогиб будет один и тот же при условии  $x < a$ ;  $M_x = Px$  и  $x > a$ ;  $M_x = Px - P(x - a)$ , то можно записать, что  $D_1 = D_2$ .

При условии  $x > a$  прогиб оси  $y$  будет максимальным при  $x = \frac{l}{2}$ , поворот сечения можно записать как  $\theta_1 = \frac{dy}{dx} = 0$ .

Это условие будет иметь вид:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{Pl^2}{2 \cdot 4} - \frac{P}{2} \left( \frac{l}{2} - a \right)^2 + C_2 \right) = 0,$$

откуда

$$C_2 = \frac{P}{2} - \frac{(l-2a)^2}{4} - \frac{Pl^2}{8}.$$

Подставив полученное значение  $C_2$  в выражения (1)–(4), получим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{Px^2}{2} + \frac{P(l-2a)^2}{8} - \frac{Pl^2}{8} \right); \quad (5)$$

$$y = -\frac{1}{EI_{xt}} \left[ \frac{Px^3}{6} + x \left( \frac{Px^2}{2} + \frac{P(l-2a)^2}{8} - \frac{Pl^2}{8} \right) \right];$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{Px^2}{2} - \frac{P(x-a)^2}{2} + \frac{P(l-2a)^2}{8} - \frac{Pl^2}{8} \right);$$

$$y = -\frac{1}{EI_{xt}} \left[ \frac{Px^3}{6} - \frac{P(x-a)^3}{6} + x \left( \frac{P(l-2a)^2}{8} - \frac{Pl^2}{8} \right) \right]. \quad (6)$$

Для проверки полученных зависимостей запишем поворот сечения как  $\theta_1 = \frac{dy}{dx}$  при  $x=0$ . Из выражения (5) значение  $\theta_1$  будет равно:

$$\theta_1 = -\frac{1}{EI_{xt}} \left( \frac{P(l-2a)^2}{8} - \frac{Pl^2}{8} \right) = -\frac{Pa}{2EI_{xt}}(a-l).$$

Полученная зависимость полностью совпадает со значением поворота сечения, представленного в справочной литературе.

Величина начального выгиба  $f_{0t}$  в середине пролета балки при  $x = \frac{l}{2}$  будет определяться из выражения (6) как:

$$f_{0t} = -\frac{1}{EI_{xt}} \left[ \frac{Pl^3}{48} - \frac{P}{6} \left( \frac{l}{2} - a \right)^3 + \frac{l}{2} \left( \frac{P(l-2a)^2}{8} - \frac{Pl^2}{8} \right) \right],$$

и после некоторых преобразований получим:

$$f_{0t} = \frac{Pa}{24EI_{xt}}(3l^2 - 4a^2), \quad (7)$$

где  $EI_{xt}$  – изгибная жесткость тавра;  $I_{xt}$  – момент инерции сечения исходного тавра.

Ранее в [1] было получено соотношение между моментами инерции сечений тавра  $I_{xt}$  и двутавра  $I_x$  как  $I_{xt} = \frac{I_x}{2}$ , откуда выражение (7) можно записать как:

$$f_{0t} = \frac{Pa}{12EI_x}(3l^2 - 4a^2).$$

После присоединения второго пояса к исходному тавру и снятия приложенного усилия балка пытается вернуться в первоначальное положение, при этом двутавр изгибается моментом  $M_0 = Pa$ . В результате происходит некоторая потеря предварительного напряжения в балке, а начальный выгиб балки уменьшается на величину  $f_p$  (рис. 1в).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки можно записать как:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{M_0}{EI_x}; \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{EI_x} \int M_0 dx = \frac{1}{EI_x} (M_0 x + C); \\ y &= \frac{1}{EI_x} \int (M_0 x + C) dx = -\frac{1}{EI_x} \left( M_0 \frac{x^2}{2} + Cx + D \right). \end{aligned}$$

Граничные условия будут равны:

$$x = 0; y = 0. \quad D = 0.$$

$$x = l; y = 0. \quad \frac{M_0 l^2}{2} + Cl = 0. \quad \text{Откуда } C = -\frac{M_0 l}{2}. \quad \text{Тогда}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{EI_x} \left( M_0 x - \frac{M_0 l}{2} \right) = \frac{M_0}{2EI_x} (2x - l).$$

Значение величины  $f_p$  при  $x = \frac{l}{2}$  будет равно:

$$f_p = \frac{1}{EI_x} \left( \frac{M_0 x^2}{2} - \frac{M_0 x l}{2} \right) = -\frac{M_0 l^2}{8EI_x} = -\frac{Pal^2}{8EI_x}.$$

Результирующий выгиб балки на стадии предварительного напряжения (рис. 1г) будет равен:

$$f_0 = f_{0t} - f_p = \frac{Pa}{12EI_x}(3l^2 - 4a^2) - \frac{Pal^2}{8EI_x} = \frac{Pa}{24EI_x}(3l^2 - 8a^2). \quad (8)$$

Потери величины выгиба балки на стадии изготовления балки могут быть оценены коэффициентом  $\psi$ , равным:

$$\psi = \frac{f_0}{f_{0r}} = \frac{Pa}{24EI_x} (3l^2 - 8a^2) / \frac{Pa}{12EI_x} (3l^2 - 4a^2) = \frac{3l^2 - 8a^2}{6l^2 - 8a^2}.$$

При  $a = \frac{l}{3}$ ,  $\psi = 0,345$ ; при  $a = \frac{l}{4}$ ,  $\psi = 0,455$ .

Под действием внешней эксплуатационной нагрузки (примем нагрузку равномерно распределенной) балка получает прогиб  $f_q$  (рис. 2б), который будет равен:

$$f_q = \frac{5ql^4}{384EI_x} = \frac{5}{48} \frac{M_q l^2}{EI_x}, \quad (9)$$

где  $q$  – равномерно распределенная погонная нагрузка на балку;  $M_q$  – момент внешней нагрузки;  $EI_x$  – изгибная жесткость двутавра;  $I_x$  – момент инерции сечения предварительно напряженной балки;  $E$  – модуль упругости стали.

Значения  $M_0$ ,  $M_q$  и  $I_x$  получены в [2] и могут быть записаны как:

$$M_0 = Pa = 0,1275R_y Ah; \quad M_q = 0,4914R_y Ah; \quad I_x = 0,1656Ah^2,$$

где  $R_y$  – расчетное сопротивление малоуглеродистой стали С235;  $A$  – площадь поперечного сечения балки;  $h$  – высота сечения балки.

Подставив в выражение (9) значения  $M_q$  и  $I_x$ , получим:

$$f_q = \frac{5}{48} \frac{0,4914R_y Ah l^2}{0,1656Ah^2 E} = 0,309 \frac{R_y l^2}{Eh}.$$

Подставив полученное значение для  $M_0$  в выражение (8), получим выражение:

$$f_0 = \frac{M_0}{24EI_x} (3l^2 - 8a^2) = \frac{0,1275R_y Ah}{0,1656Ah^2 24E} (3l^2 - 8a^2) = 0,032 \frac{R_y (3l^2 - 8a^2)}{Eh}.$$

Суммарный максимальный прогиб  $f_{max}$  предварительно напряженной балки от действия внешней нагрузки (рис. 2в) будет равен разности прогиба от внешней нагрузки и обратного выгиба балки.

$$f_{max} = f_q - f_0 = 0,309 \frac{R_y l^2}{Eh} - 0,032 \frac{R_y (3l^2 - 8a^2)}{Eh},$$

после преобразований величину суммарного прогиба можно записать как:

$$f_{max} = \frac{R_y}{Eh} (0,213l^2 + 0,256a^2). \quad (10)$$

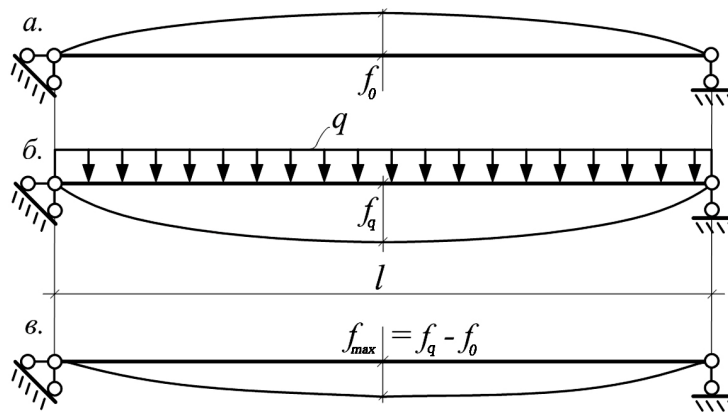


Рис. 2. Прогиб предварительно напряженной балки от действия внешней нагрузки:  
 а – результирующий обратный выгиб балки на стадии предварительного напряжения;  
 б – схема загрузки балки и прогиб от действия внешней нагрузки;  
 в – суммарный максимальный прогиб предварительно напряженной балки

Подставив в полученное выражение (10) некоторые значения величины  $a$  (см. рис. 1а), получим:

$$\text{при } a = \frac{l}{3}, \quad f_{max} = 0,309 \frac{R_y}{Eh} \left( 0,213l^2 + 0,256 \frac{l^2}{9} \right) = 0,241 \frac{R_y l^2}{Eh};$$

$$\text{при } a = \frac{l}{4}, \quad f_{max} = 0,309 \frac{R_y}{Eh} \left( 0,213l^2 + 0,256 \frac{l^2}{16} \right) = 0,229 \frac{R_y l^2}{Eh}.$$

Эффективность предварительного напряжения при изменении расстояния  $a$  от опоры балки до точки приложения нагрузки  $P$  может быть оценена коэффициентом  $\xi$ , который определяется отношением величины прогиба от действия внешней нагрузки обычной стальной балки  $f_q$  и величины прогиба предварительно напряженной балки  $f_{max}$ .

$$\text{При } a = \frac{l}{3}, \quad \xi = \frac{f_q}{f_{max}} = 0,309 \frac{R_y l^2}{Eh} / 0,241 \frac{R_y l^2}{Eh} = 1,28;$$

$$\text{при } a = \frac{l}{4}, \quad \xi = \frac{f_q}{f_{max}} = 0,309 \frac{R_y l^2}{Eh} / 0,229 \frac{R_y l^2}{Eh} = 1,35.$$

На основании всего вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. Уменьшение величины начального выгиба на стадии изготовления балки вследствие некоторых потерь предварительного напряжения составляет от 34 до 45 %, в зависимости от места приложения нагрузки  $P$ .

2. Обратный выгиб балки, предварительно напряженной изгибом тавра, снижает величину прогиба от действия внешней по отношению к прогибу обычной стальной балки от 28 до 35 %.

3. Полученные выражения справедливы для определения прогиба балки, предварительно напряженной изгибом тавра с шарнирным закреплением опорных узлов.

#### Библиография

1. *Кравчук В.А.* Конструкции, предварительно напряженные без затяжек. Оптимальное проектирование. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2010. – С. 20–95.

2. *Иодчик А.А., Кравчук В.А.* Тонкостенные стальные балки, предварительно напряженные изгибом тавра // Вестник гражданских инженеров. – 2009. – № 1 (18). – С. 18–21.

#### Bibliography

1. *Kravchuk V.A.* Preliminary strained constructions without tie-beams. Optimum designing. – Habarovsk: Pacific State Univ. Press, 2010. – P. 20–95.

2. *Iodchik A.A., Kravchuk V. A.* The thin-walled steel beams preliminary strained by a t-beam bend // Vestnik grazhdanskikh inzhenerov. – 2009. – N 1 (18). – P. 18–21.