А.А. Лемперт, канд. физ.-мат. наук
Институт динамики систем и теории управления СО РАН
Фунг Тхе Бао, аспирант
Национальный исследовательский
Иркутский государственный технический университет

УДК 519.86: 517.929

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В НЕПРЕРЫВНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В статье строится математическая модель системы управления запасами с периодическими функциями возмущения в предположении о том, что поставки осуществляются непрерывно. Выполнено исследование модели на устойчивость и изучено влияние периодических коэффициентов на устойчивость системы при наличии запаздывания.

Ключевые слова: *управление запасами, периодический коэффициент, дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.*

A.A. Lempert, Cand. Sc. Physics and Mathematics
Phung The Bao, P.G.

STABILITY OF THE INVENTORY MANAGEMENT SYSTEM IN THE CONTINUOUS CASE

The goal of this study is to analyse a mathematical model of inventory management system with periodic perturbation functions, on the assumption of that the supplies are made continuously. The research of the model stability and periodic coefficients influence on the system stability with time delay is worked out.

Key words: *inventory management, periodic coefficient, differential equations with periodic coefficients, differential equation with delayed argument.*

Введение

Под системой управления запасами обычно понимают комплекс мероприятий по созданию и пополнению запасов, а также по организации контроля и планирования поставок. При этом очевидно, что избыток запасов – это извлеченные из оборота средства и дополнительные расходы на хранение, а их недостаток – потеря клиентов и снижение выручки. В связи с этим для повышения эффективности работы любого предприятия в сфере производства и торговли следует оптимизировать управление запасами. Для решения данной задачи необходимо использовать методы математического, в частности компьютерного, моделирования.

Применение математических методов в управлении запасами восходит к началу 20-х гг. прошлого века. Основателем данного научного направления, которое в англоязычной литературе называется «Scientific Inventory Management» (или просто «Inventory Management), считается Р. Уилсон (R.H. Wilson). С его научными результатами можно ознакомиться, например, по изданию [1]. В дальнейшем было выпущено огромное число работ по данной тематике. Привести полную библиографию не представляется возможным, краткая приведена в [2]. При этом, однако, все алгоритмы управления запасами основываются на двух методиках, описанных еще в [1]: на методике фиксированного размера запаса и методике фиксированного интервала времени между заказами. В обоих случаях предполагается, что поставки осуществляются в дискретные моменты крупными партиями.

Однако в некоторых случаях модели с дискретными поставками оказываются непригодными (или по крайней мере недостаточно точными) для математического описания системы управления запасами. Это происходит в тех случаях, когда пропускная способность транспортного канала ограничена, и поставки осуществляются небольшими партиями через малые промежутки времени, либо уровень потребления ресурса очень велик, либо если поставки осуществляются трубопроводным транспортом, технология функционирования которого предполагает непрерывность поставок, и в других им подобных системах. Справедливости ради следует заметить, что модели управления запасами в непрерывной постановке существуют [3], хотя и имеют весьма (и, на наш взгляд, неоправданно) ограниченное применение.

В работе [4], знакомство с которой послужило отправной точкой для наших исследований, предложена математическая модель однономенклатурной системы управления запасами (поставками) в непрерывной постановке на основе обыкновенных дифференциальных уравнений (Ordinary Differential Equations, ODE). При этом рассматривается два способа регулирования поставок: 1) поставки пропорциональны с обратным знаком текущему запасу («модель А0»); 2) поставки пропорциональны с обратным знаком текущему запасу и скорости его изменения («модель В0»).

Первый случай приводит к ODE второго порядка без диссипативного члена

$$y''(t) + a_1 y(t) \quad -x'(t) \text{ («модель А0»)}, \tag{1}$$

а второй – к уравнению

$$y''(t) + a_0 y'(t) + a_1 y(t) \quad -x'(t) \text{ («модель В0»)}, \tag{2}$$

где $x(t)$ – интенсивность расхода ресурса; $y(t)$ – текущий его запас (причем отрицательное значение $y(t)$ означает дефицит), a_0, a_1 – положительные константы. Уравнения (1) и (2) являются линейными неоднородными ODE второго порядка с постоянными коэффициентами.

Важным вопросом для всякой технической [5] или, как в нашем случае, экономической системы [4] является вопрос ее устойчивости. Понятие устойчивости применяется для описания постоянства какой-либо черты поведения системы и означает свойство системы возвращаться к равновесному состоянию или циклическому режиму после устранения внешних сил, вызвавших их нарушения. Для моделей А0 и В0 данный вопрос решается достаточно легко: хорошо известно, что при $x(t) = \text{const}, a_0, a_1 > 0$ всякое решение уравнения (1) будет устойчивым по Ляпунову (или находится на границе устойчивости), а всякое решение (2) – асимптотически устойчивым [4]. Забегая вперед, отметим, что при дальнейшем усложнении моделей исследование их устойчивости становится более сложной задачей.

В работе [6] авторами модели А0 и В0 были усложнены за счет введения временного промежутка между моментом подачи заявки и моментом ее реализации, что, отметим, характерно для большинства реальных экономических систем (на то, что такой учет необходим, указывалось еще в монографии [1]). Подобный учет в рамках непрерывной модели возможен при использовании дифференциальных уравнений с запаздывающим (отклоняющимся) аргументом (Delay Differential Equations, DDEs) [7, 8].

1. О построении модели управления запасами с периодическими функциями возмущения

В работе [6] исследовались модели управления запасами с учетом запаздывания, в предположении о том, что функция возмущения является постоянной, т.е. модель описывается дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом и постоянными коэффициентами. Показано, что в этом случае модель второго порядка с запаздывающим аргументом без диссипативного члена является неустойчивой и, следовательно, непригодна для использования в системе управления запасами.

Целью данного раздела является определение условий, при которых модель управления запасами с периодическими функциями возмущения устойчива (неустойчива). Рассмотрим теперь случай, когда функция возмущения не является постоянной, однако мало изменяется по времени. Пусть для начала модель описывается дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами без диссипативного члена:

$$y''(t) + a_1(t) y(t) = 0 \text{ («модель типа А0»)},$$

где функция возмущения $a_1(t)$ является периодической с периодом T, т.е $a_1(t+T)=a_1(t)$.

Для наших целей функцию $a_1(t)$ удобно задавать в виде:

$$a_1(t)=1+\varepsilon f(t),$$

где $0<\varepsilon<1$ – некоторый параметр, а $|f(t)|\le 1$ – периодическая функция периода T.

Тогда предыдущее уравнение примет вид:

$$y''(t)+(1+\varepsilon f(t))y(t)=0. \qquad (3)$$

Уравнение, записанное в такой форме, называется уравнением Хилла. Рассмотрим два наиболее известных способа задания функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases}-1 & при \quad \mathrm{t}\in[0,T \\ 1 & при \quad \mathrm{t}\in[T,2T\end{cases} \quad \text{(«модель А01»), и} \qquad (4)$$

$$f(t)=\cos(\omega t),\ \text{где}\ \omega=\frac{\pi}{T}\ \text{(«модель А02»).} \qquad (5)$$

Уравнение Хилла «с переключением» (3)–(4) и уравнение Матье (3)–(5) используются при решении различных задач математической физики, при описании волнового движения с эллиптическими граничными условиями, при изучении явления параметрического резонанса и.т.д. В зависимости от конкретной формы периодической функции $f(t)$ решения могут иметь вид устойчивых квазипериодических колебаний, либо колебания будут раскачиваться с нарастающей экспоненциально амплитудой.

В теории управления запасами систему можно описывать уравнениями Хилла «с переключением» и Матье, например, в случае, когда потребный размер запаса зависит от даты (дня недели, месяца, времени года).

Рассмотрим влияние периодических коэффициентов на устойчивость в системе управления запасами.

Найдем вид областей устойчивости на плоскости ε, T для уравнений (3)–(4) и (3)–(5).

Из решения задачи (1. п. 3) [9] вычислим для системы уравнения (3)–(4) с $0<\varepsilon<1$ матрицы преобразования A за период T в базисе $(y,\dot{y})$: $A=A_2A_1$, где

$$A_1=\begin{pmatrix}\cos\omega_1 t & \dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} \\ -\omega_1\sin\omega_1 t & \cos\omega_1 t\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}\cos\omega_2 t & \dfrac{\sin\omega_2 t}{\omega_2} \\ -\omega_2\sin\omega_2 t & \cos\omega_2 t\end{pmatrix},\ \omega_{1,2}=\sqrt{1\mp\varepsilon},0<\varepsilon<1.$$

Отсюда условие устойчивости системы (3)-(4) имеет вид:

$$|trA|=\left|2\cos\omega_1 t\cos\omega_2 t-\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\right|\le 2.$$

По диаграмме Айнса-Стретта [10] для определения области устойчивости уравнения (3) –(5) имеем, что при $k=1$ область неустойчивости определяется неравенствами: $\sigma>\frac{1}{4}-\frac{\varepsilon_1}{2}$ и $\sigma<\frac{1}{4}+\frac{\varepsilon_1}{2}$; при $k=2$ область неустойчивости определяется неравенствами: $\sigma>1-\frac{\varepsilon_1^{\ 2}}{12}$ и $\sigma<1+\frac{5}{12}\varepsilon_1^{\ 2}$ и т.д. Здесь $\sigma=\frac{T^2}{\pi^2},\varepsilon_1=\frac{\varepsilon T^2}{\pi^2}$.

На рисунке 1 показаны области устойчивости для моделей А01–А02 в пространстве ε, T. Для модели А01 область устойчивости отмечена горизонтальной штриховкой, для модели А02 – диагональной.

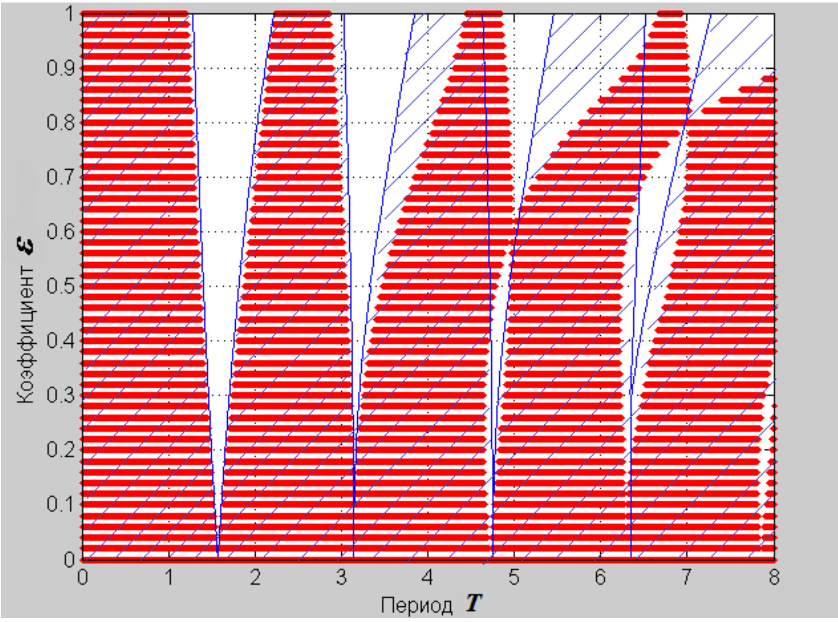


Рис. 1. Области устойчивости для моделей А01 и А02

Из рисунка 1 видно, что параметрический резонанс при любом $0<\varepsilon<1$ имеет место для бесконечного множества значений периода T. При этом для малых ε параметрический резонанс наступает вблизи значений $T=\dfrac{k\pi}{\omega_1+\omega_2}$, где $k=1,2,...$ Также можно отметить, что, как правило, модели А01 и А02 устойчивы и неустойчивы одновременно, однако существуют области значений параметров (T,ε), при которых устойчивой будет только одна из моделей. При этом с увеличением T форма областей устойчивости для указанных моделей существенно отличается.

2. Модели с малыми непериодическими возмущениями специального вида

Целью данного раздела является определение условий, при которых за счет малых возмущений коэффициента пропорциональности в моделях типа А0 можно добиться асимптотической устойчивости. Предположим, что функция $f(t)$ из (4) не является периодической, т.е. переключения осуществляются через разные промежутки времени:

$$f(t)=\begin{cases}\pm 1, t\in\left[t_{2k},t_{2k+1}\right),\\ \mp 1, t\in\left[t_{2k+1},t_{2k+2}\right), k=0,1,2,...\end{cases} \tag{4'}$$

Как известно, система является асимптотически устойчивой, если при любых начальных данных $y(0), y'(0)$ траектория на фазовой плоскости (y,y') с течением времени стремится к началу координат.

Можно убедиться, что движение по фазовым траекториям в данном случае происходит в отрицательном направлении (по часовой стрелке) и «наиболее благоприятным» с точки зрения устойчивости является режим, при котором функция $f(t)$ принимает положительные значения в II и IV квадрантах (при $y(t)y'(t)>0$) и отрицательные – во I и III квадрантах (при $y(t)y'(t)<0$).

Изменяя знак функции $f(t)$ в моменты, когда $y(t)=0$ или $y'(t)=0$, так, чтобы выполнялись указанные выше условия, получим асимптотическую устойчивость решения.

Если же изменять знак функции $f(t)$ противоположным образом, то решение, очевидно, будет неустойчиво.

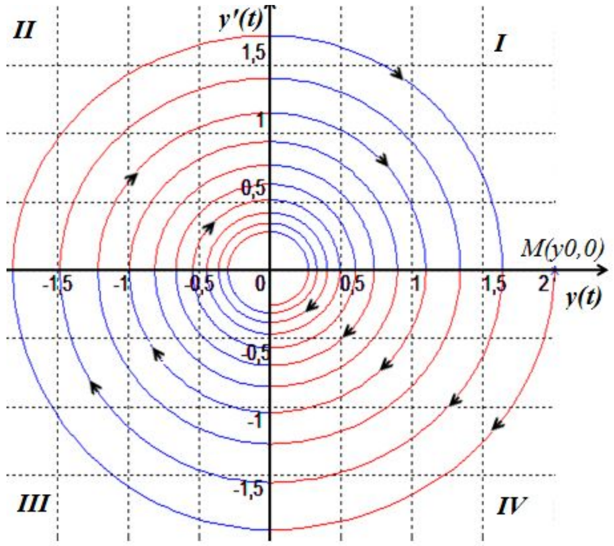


Рис. 2. Фазовая траектория модели А0

В качестве примера (рис. 2) рассмотрим случай, когда $t_0 = 0, y(0) = y_0, y'(0) = 0$. Тогда на полуинтервале $\left[0, t_1\right)$ уравнение (3)-(4') имеет решение:

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_1 t)\text{, где } \omega_1 = \sqrt{1-\varepsilon}\,.$$

На полуинтервале $\left[t_1, t_2\right)$ при $y(t_1) = 0$, т.е $t_1 = \dfrac{\pi}{2\omega_1}$ уравнение (3)–(4') имеет решение:

$$y(t) = \frac{y_0\omega_1}{\omega_2}\cos\left(\omega_2 t - (\omega_2 t_1 - \frac{\pi}{2})\right),$$

где $\omega_2 = \sqrt{1+\varepsilon}$.

$$y'(t_2) = 0\text{, т.е } t_2 = t_1 + \frac{\pi}{2\omega_2}\,.$$

Изменение амплитуды тогда определено по формуле:

$$\Delta A_1 = \left|A_1 - A_2\right| = y_0\frac{\omega_1}{\omega_2} - y_0 = y_0\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1\right|,$$

Аналогично получим формулу изменения амплитуды решения уравнения (3)– (4'):

$$\Delta A_k = y_0\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^k\left|\frac{\omega_1}{\omega_2} - 1\right|, \quad k = 0,1,2,3\ldots$$

Таким образом решение уравнения (3)–(4') устойчиво. Амплитуда затухающих колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t},$$

где $\beta = \dfrac{\ln(A_0/A)}{T} = \dfrac{2\ln(\omega_2/\omega_1)}{\pi/\omega_1 + \pi/\omega_2}$.

3. Влияние периодических коэффициентов на устойчивость системы при наличии запаздывания

В данном разделе рассмотрим модели системы управления запасами на основе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с периодическими коэффициентами. Ранее установлено [6], что при постоянном a_1 любое сколь угодно малое запаздывание приводит к неустойчивости. Цель раздела – установить, возможно ли за счет малых непериодических возмущений специального вида добиться асимптотической устойчивости системы аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе для модели типа А0 (без запаздывания).

Рассмотрим модели А0 и В0 в случае, когда пополнение запаса происходит с некоторым запаздыванием.

$$y''(t)+a_1(t)y(t-\tau) \quad -x'(t)\,, \tag{6}$$

и к уравнению:

$$y''(t)+a_0y'(t)+a_1(t)y(t-\tau) \quad -x'(t)\,, \tag{7}$$

где $a_* \le a_1(t) \le a^*$ является ограниченной кусочно-непрерывной функцией.

Для уравнения (6) будем считать расход продукта в системе постоянным, т.е. $x'(t)=0$, тогда

$$y''(t)+a_1(t)y(t-\tau)=0 \text{ («модель А1»).} \tag{8}$$

В работе [11] показано, что всякое решение уравнения (8) меняет знак на любом интервале (t^*,∞) независимо от величины τ. Далее будем предполагать τ малой величиной. Данное предположение является вполне естественным для современной экономики в условиях развития информационных технологий. Разложим функцию $y(t-\tau)$ в ряд Тейлора по τ и ограничимся первым членом, тогда уравнение (8) примет вид

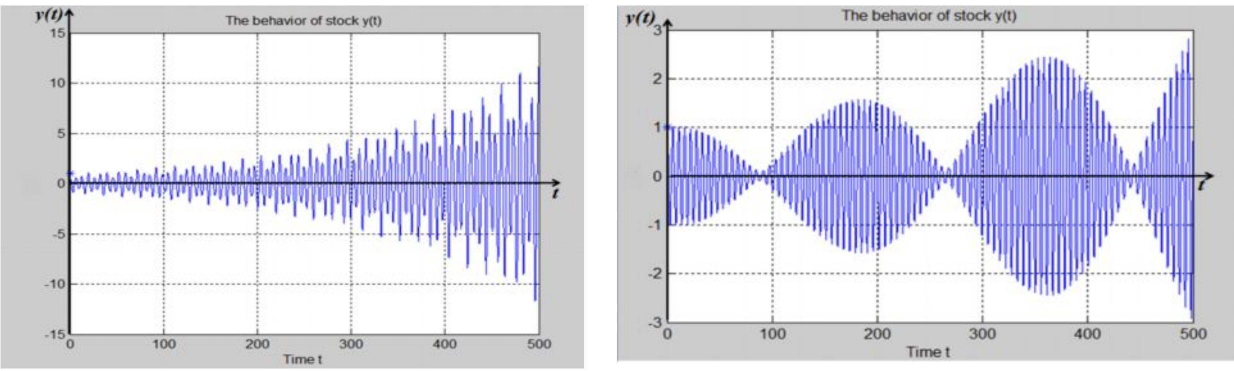
$$y''(t)-a_1(t)\tau y'(t)+a_1(t)y(t)=0\,. \tag{9}$$

Нетрудно убедиться, что любое нетривиальное решение уравнения (9) будет неустойчиво, так как действительные части корней характеристического уравнения будут положительны для любой ограниченной функции $a_* \le a_1(t) \le a^*$. Таким образом, за счет малых возмущений невозможно добиться устойчивости модели А1.

В качестве примера рассмотрим $a_1(t)=1+\varepsilon\cos(\omega t)$, $0<\varepsilon<1$, тогда уравнение (8) примет вид уравнения Матье с запаздыванием:

$$y''(t)+(1+\varepsilon\cos(\omega t))y(t-\tau)=0\,. \tag{10}$$

На рисунке 3 показаны траектории решения уравнения (10) при $\tau=0.05, \varepsilon=0.5, T=2.8$. Вычислительный эксперимент проводился с начальными условиями: $y(t)=1, y'(t)=0$, $t\in[-\tau,0]$.



а

Рис. 3. Траектория решения для модели А1: а – траектория решения для модели А1 при *ф= 0.01, e = 0.4, T = 2.0*; б – траектория решения для модели А1 при *ф= 0.05, e = 0.5, T = 2.8*

Таким образом, при малом изменении функции возмущения $a_1(t)$, $a_1(t)\in[1-\varepsilon;1+\varepsilon]$ установлено, что модель А1 при любом запаздывании (сколь угодно малом) неустойчива. Можно видеть, что на некоторых локальных отрезках времени амплитуда колебаний заметно уменьшается, однако максимальное значение амплитуды с течением времени возрастает.

Таким образом, можно считать, что для формирования эффективной системы управления запасами в непрерывной постановке при наличии запаздывания необходимо учитывать не только величину текущего запаса, но и скорость его изменения. Для этого в дальнейшем рассматривается модель (7), где, не нарушая общности рассмотрения, будем полагать, что $x'(t)=0$.

Тогда уравнение (7) примет вид:

$$y''(t)+a_0 y'(t)+a_1(t)y(t-\tau)=0 \text{ («модель B1»)}, \tag{11}$$

где $a_0>0$ – константа;

$a_* \le a_1(t) \le a^*$ – ограниченная функция.

В работе [6] выполнено исследование «модели B1» на устойчивость при постоянном a_1.

Используя этот результат в данном случае, имеем, что решение уравнения (11) неустойчиво при $\frac{a_0}{\tau}<a_*$, а при $\frac{a_0}{\tau}>a^*$ – устойчиво. Далее, как и в «модели A1», будем предполагать τ малой величиной. Разложим функцию $y(t-\tau)$ в ряд Тейлора и ограничимся первым членом, тогда уравнение (11) примет вид:

$$y''(t)+\left(a_0-\tau a_1(t)\right)y'(t)+a_1(t)y(t)=0. \tag{12}$$

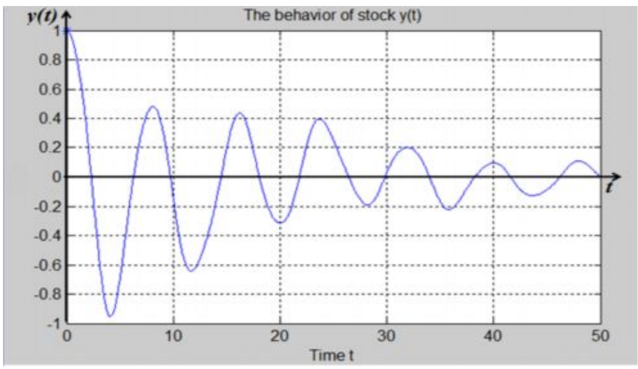
Легко убедиться, что действительные части корней характеристического уравнения при любых значениях a_0,τ и $a_*<\frac{a_0}{\tau}<a^*$ могут быть как положительны, так и отрицательны для любой ограниченной функции $a_* \le a_1(t) \le a^*$. Таким образом, решение уравнения (12) в данном случае может быть как устойчиво, так и неустойчиво.

Аналогичные результаты получены при численном исследовании модели и для большого запаздывания τ.

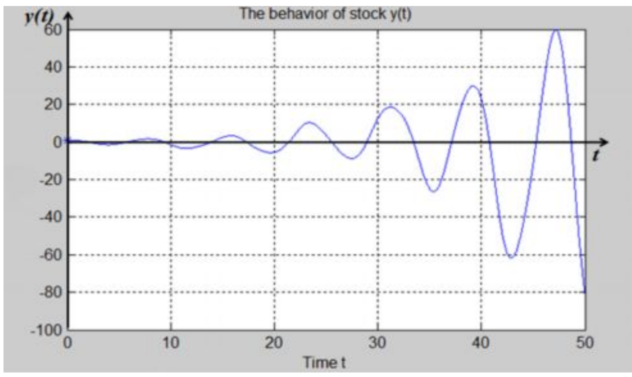
В качестве примера рассмотрим $a_1(t)=1+\varepsilon\cos(\omega t),\ 0<\varepsilon<1$, тогда $a_*=1-\varepsilon$ и $a^*=1+\varepsilon$. Уравнение (11) примет вид:

$$y''(t)+a_0 y'(t)+(1+\varepsilon\cos(\omega t))y(t-\tau)=0. \tag{13}$$

На рисунке 4 показаны траектории решения уравнения (13) при τ=1, ε=0,5, ω=1, при $a_0=1$ (рис. 4а) и при a_0=0,6 (рис 4б), т.е. 0,5< a_0< 1,5. Вычислительный эксперимент проводился с начальными условиями: $y(t)=1, y'(t)=0$, $t\in[-\tau,0]$.



а



б

Рис. 4. Траектория решения для модели B1: а – траектория решения для модели B1 при $a_0=1$; б – траектория решения для модели B1 при $a_0=0.6$

Из рисунка 4 можно видеть, что система действительно может быть как асимптотически устойчивой (рис. 4 а), так и неустойчивой (рис. 4 б).

Таким образом, при малом изменении функции возмущении $a_1(t)$, $a_1(t)\in[1-\varepsilon;1+\varepsilon]$

установлено, что при любых значениях a_0, τ, модель В1 при $a_0/\tau > 1-\varepsilon$ устойчива, а при $a_0/\tau < 1-\varepsilon -$ неустойчива. При $1-\varepsilon < a_0/\tau < 1+\varepsilon$ модель может быть как асимптотически устойчивой, так и неустойчивой. Наиболее интересным выводом является то, что при наличии больших запаздываний в системе модель В1 с периодическими коэффициентами может быть устойчивой при некоторых параметрах, а следовательно, вполне пригодна для использования в системе управления запасами.

4. Программная реализация

С использованием среды MatLab авторами создана программа для решения дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с численным и графическим представлением результатов, при этом используются следующие встроенные функции:

- *ODE*() реализует численные методы решения дифференциальных уравнений с автоматическим выбором шага;
- *DDE*() реализует численные методы решения дифференциальных уравнений с запаздыванием с автоматическим выбором шага;
- *PLOT*(*x,y*) позволяет строить график при задании функции *y*=*f*(*x*) в аналитическом виде, в виде вектора или матриц;
- *max,min* позволяет определить максимальный и минимальный элемент в массиве.
- *normrnd* функция предназначена для генерации случайных величин по нормальному закону.

Программа выполняет следующие операции:

- решение дифференциальных уравнений второго порядка;
- решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом второго порядка;
- построение графиков решений;
- определение максимальной амплитуды.

Заключение

В работе получила дальнейшее развитие динамическая система управления запасами в непрерывной постановке на основе дифференциальных уравнений второго порядка (ODE и DDEs). Основное внимание было уделено исследованию фундаментального для динамических систем свойства устойчивости. Получены следующие основные результаты:

- за счет малых непериодических возмущений коэффициента пропорциональности система, в которой поставки обратно пропорциональны текущему размеру запаса, при отсутствии запаздывания может быть сделана асимптотически устойчивой, а при наличии запаздывания невозможно добиться асимптотической устойчивости системы;
- получены достаточные условия устойчивости и неустойчивости системы, в которой поставки пропорциональны не только запасу, но и скорости его изменения запаса при наличии запаздывания;
- выполнены иллюстрирующие численные расчеты, результаты которых подтвердили и дополнили результаты теоретического исследования.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проекты №№ 11-07-00245, 12-07-33045-мол-а-вед, 12-07-31080-мол-а, 13-06-00653.

Библиография

1. *Buchan J., Koenigsberg E.* Scientific Inventory Management. Englewood Cliffs, 1963. – 523 p.
2. *Рыжиков Ю.И.* Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Питер, 2001. – 384 с.
3. *Решетникова Г.Н.* Синтез и моделирование системы управления поставками // Вестн. ТГУ. – 2006. – № 293. – С. 59 – 62.

4. *Колемаев В.А.* Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов систем. – М.: Юнити–Дана, 2005. – 295 с.

5. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления. – СПб.: Профессия, 2003. – 751 с.

6. *Казаков А.Л, Лемперт А.А., Фунг Тхе Бао.* Математическая модель управления запасами (поставками) с учетом запаздывания // Вестн. ИрГТУ. –2012. –№ 4(63). – С. 131–137.

7. *Мышкис А.Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

8. *Bellen A.,Zennaro M.* Numerical Methods for Delay Differential Equations. – New York: Oxford University Press, 2003. – 398 p.

9. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Ижевск, 2000. – 368 с.

10. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.

11. *Каменский Г.А.* Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом. – М.: Изд-во Московского гос. ун-та, 1954. – №.165. – С. 195–204.

Bibliography

1. *Buchan J., Koenigsberg E.* Scientific Inventory Management. Englewood Cliffs, 1963. – 523 p.

2. *Ryzhikov Yu.I.* Theory of queues and inventory management. – SPb.: Peter, 2001. – 384 p.

3. *Reshetnikova G.N.* Synthesis and simulation of supply management system // TSU Bulletin. – 2006. – N 293. – P. 59 – 62.

4. *Kolemaev V.A.* Economic-mathematical modeling. Modeling of macroeconomic processes systems. – M.: Unity–Dana, 2005. – 295 p.

5. *Besekersky V.A., Popov E.P.* The theory of automatic control systems. – SPb.: Professiya, 2003. – 751 p.

6. *Kazakov A.L., Lempert A.A., Phung The Bao.* Mathematical model of inventory (supply) management with delay // ISTU Bulletin. –2012. – N 4(63). – P. 131–137.

7. *Myshkis A.D.* Linear differential equations with delayed argument. – M.: Nauka, 1972. – 352 p.

8. *Bellen A.,Zennaro M.* Numerical Methods for Delay Differential Equations. – New York: Oxford University Press, 2003. – 398 p.

9. *Arnold V.I.* Ordinary differential equations. – Izhevsk, 2000. – 368 p.

10.*Merkin D.R.* Introduction to the theory of stability of motion. – M.: Nauka, 1987. – 304 p.

11.*Kamensky G.A.* About asymptotic behavior of solutions of linear second order differential equations with delay. – M.: MSU Press, 1954. – N165. – P. 195– 204.