Л.И. Санеева, канд. физ.-мат.наук, доц., e-mail: ili04@mail.ru
В.С. Данзанова, аспирант, e-mail: danz_valentina@mail.ru
Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, г. Улан-Удэ

УДК 519.6

ОПТИМИЗАЦИЯ УЗЛОВ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

Рассмотрена задача о распределении узлов в зависимости от поведения подынтегральной функции и ее производных. При вычислении интеграла была выбрана сетка мельче там, где норма функции больше или максимум производных функции больше.

***Ключевые слова**: кубатурные формулы, функционал погрешности, оптимальное распределение узлов, многомерные интегралы, пограничный слой.*

L.I. Saneeva, Cand. Sc. Physics and Math., Prof.
V.S. Danzanova, P.G.

OPTIMIZATION OF CUBATURE INTEGRATION POINTS

The article is devoted to the problem of the integration points distribution in terms of the subintegral function and its derivatives. When evaluating the integral the finer grid was used where the norm of the function is greater or the maximum of derivatives is bigger.

***Key words:** cubature formulas, the error functional, the optimal distribution of points, multi-dimensional integrals, the boundary layer.*

Возможные постановки классической задачи рассматривались многими математиками.

В работах Н.С. Бахвалова [1], Л.В. Войтишек [2] предложены схемы об оптимальном распределении узлов, близкие к нашей схеме.

В одномерном случае в работе Н.С. Бахвалова вычисляется интеграл

$$J(f)=\int_0^1 f(x)\,dx,$$

и подынтегральная функция удовлетворяет следующим условиям:

$$\left|f''(x)\right|\le M_j$$

на отрезках $\Omega_j = (a_{j-1}, a_j)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = 1$.

Интеграл по всему отрезку $[0,1]$ вычисляется по формулам с переменным шагом интегрирования [3]:

$$J(f(x))=\int_0^1 f(x)\,dx \cong \sum_{j=1}^{k} S_j^{h_j}(f).$$

В работе С.Л. Соболева [4] построены формулы с пограничным слоем для рациональных многогранников.

В работе Л.В. Войтишек [2] исследуются кубатурные формулы с переменным шагом интегрирования в *n*-мерном пространстве E_n для рациональных многогранников $M \subset \Delta$.

Сначала рассматривается функционал l_Δ^h с регулярным пограничным слоем для *n*-мерного куба с узлами на решетке с шагом h, затем строится функционал для рационального многогранника $M \subset \Delta$ с вершинами в узлах решетки с шагом h_1 вида

$$l_1(x)=\sum_{h_1\gamma\in M} C_\gamma h_1^n \delta(x-h_1\gamma)-\sum_{h\gamma\in M} C_\gamma h^n \delta(x-h\gamma),$$

где коэффициенты $C_\gamma = C_{\gamma_1}, C_{\gamma_2}, \ldots, C_{\gamma_n}$ определяются из системы

$$\sum_{\gamma_i=0}^{m}\left(C_{\gamma_i}-1\right)\gamma_i^{\alpha} \quad \frac{1-\left(\dfrac{h}{h_1}\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1} =, \quad \alpha \quad 0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Искомый функционал $l_{\Delta}^{h}(x)$ определяется равенством

$$l_{\Delta}^{h}(x)=\varepsilon_{\Delta}(x)-\sum_{h_1\gamma\in M} h_1^n C_{\gamma}\delta(x-h_1\gamma)-\sum_{h\gamma\in\Delta\backslash M} h^n C_{\gamma}\delta(x-h\gamma).$$

Функционал $l_1(x)$ аннулирует точечную часть функционала $l_{\Delta}^{h}(x)$, относящуюся к внутренней области M , и заменяется функционалом с шагом h_1.

В данной статье строятся кубатурные формулы с переменным шагом интегрирования для произвольной области интегрирования Ω с кусочно-гладкой границей.

Построим кубатурные формулы, используя идею из монографии Ц.Б. Шойнжурова ([4], с. 188-192) и схемы из работ С.Н. Бахвалова [1] и Л.В. Войтишек [2] по теории кубатурных формул.

Пусть область Ω с кусочно-гладкой границей разбита на k частей $\Omega_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Введем класс функций B_1:

$$B_1=\left\{\varphi\in C^m \,/\, \max_{\substack{x\in\bar{\Omega}_j\\ |\alpha|\le m}}\left|D^{\alpha}\varphi\right|\le M_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k\right\}.$$

Лемма 1. *Пусть Ω – область определения с кусочно-гладкой границей и разбивается на k частей $\Omega_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k,$ $\max\limits_{\substack{x\in\bar{\Omega}_j\\ |\alpha|\le m}}\left|D^{\alpha}\varphi(x)\right|=M_j,$ $\dfrac{\left|\Omega_j\right|}{N_j}=h_j^n,$ $\sum\limits_{j=1}^{k}N_j=N,$ $B_0=\int\limits_{\Delta}\sum\limits_{|\alpha|\le m}\dfrac{(2\pi i\beta)^{\alpha}e^{2\pi i\beta x}}{\left|2i\beta\right|^{2m}}dx,$ $l_{\Omega}(x)=\sum\limits_{j=1}^{k}l_{\Omega_j}^{h_j}(x)$, где $l_{\Omega_j}^{h_j}(x)$ – функционалы погрешности с пограничным слоем для Ω_j и $\varphi\in B_1$.*

Тогда имеет место при $N\to\infty$ асимптотическое равенство

$$\left\|l_{\Omega}\right\|_{W_{\infty}^{m*}}=B_0\sum_{j=1}^{k}\left|\Omega_j\right|h_j^m\left(1+o(1)\right).$$

Теорема 1. *При выполнении условия леммы лучший размер сетки в классе функций B_1 определяется равенством*

$$h_j=\left[\frac{1}{N^{\frac{m+n}{n}}M_j}\sum_{i=1}^{k}M_i\left|\Omega_i\right|^{\frac{m+n}{n}}\right]^{\frac{1}{m+n}}.$$

Отсюда видно, что размер сетки области меньше там, где норма больше.

Поскольку N_j должны быть целыми, в формулах берем целую часть N_j, т.е. $[N_j]$.

Рассмотрим одномерный случай.

Пусть $\dfrac{|\Omega|}{N}=h$ и $l_{\Delta}^{h}(x)$ – функционал с симметричным пограничным слоем с узлами на решетке с шагом h, $\Delta=[0,1]$.

Разобьем Δ на непересекающиеся интервалы $\Omega_j,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$ с концами в узлах $h\beta\in[0,1]$, $\Delta \quad \sum\limits_{j=1}^{k}\Omega_j$ и $\left|\Omega_j\right|>0$.

Функционал с переменным шагом интегрирования представим в виде

$$l^{h}_{(0,1)}(x)=\sum_{j=0}^{k} l^{h_j}_{\Delta_j}(x).$$

Сначала построим вспомогательный точечный функционал для построения функционалов $l_s^j(x)$:

$$l_s^j(x)=h\delta(x-hs)-\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma^s(j)\delta(x-h_j\gamma)h_j,\quad s=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k_j-1,$$

удовлетворяющих условиям:

$$\left\langle l_s^j, x^\alpha \right\rangle = 0,\quad \alpha=0,\ 1,\ \ldots,\ m.$$

Отсюда коэффициент $C_\gamma^s(j)$ определяется из систем:

$$\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma^s(j)\gamma^\alpha = s^\alpha\left(\frac{h}{h_j}\right)^{\alpha+1},\quad \alpha\quad 0,\ 1,\ \ldots,\ m,\quad s\quad 0,\ 1,\ \ldots,\ k_j-1\cdot$$

Вычисление показывает, что

$$C_\gamma^s(j)=\frac{h}{h_j}\cdot\frac{(-1)^{m-\gamma}\,\eta(\eta-1)\ldots(\eta-m)}{\gamma(m-\gamma)!(\eta-\gamma)},$$

где $\eta = s\dfrac{h}{h_j}=\dfrac{s}{k_j}<1,\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ k_j-1.$

Обозначим через $t_j^{(1)}$ и $t_j^{(2)}$ соответственно левые и правые концы интервалов, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Суммируя функционалы по $h_j\beta\in\Omega$ и s, где

$s^s(j)=\sum_{\gamma=0}^{m} C_\gamma^s(j)\delta\big(x-h_j(\beta+\gamma)\big)h_j$, имеем

$$l_j(x)=\sum_{h_j\beta=t_j^{(1)}}^{t_j^{(2)}}\ \sum_{\gamma=0}^{m}\sum_{s=0}^{k_j-1} C_\gamma^s(j)\delta\big(x-h_j(\beta+\gamma)h_j\big)\quad \sum_{h_j\beta=t_j^{(1)}}^{t_j^{(2)}+m-1} h_j D_\beta(j)\delta(x-h_j\beta),\tag{1}$$

где

$$D_\beta(j)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\gamma=0}^{m}\sum_{s=0}^{k_j-1} C_\gamma^s(j), & t_j^{(1)}\le h_j\beta\le(m-1)h_j+t_j^{(1)},\\ 1, & t_j^{(1)}+mh_j\le h_j\beta< t_j^{(2)},\\ \displaystyle\sum_{\gamma=0}^{t_j^{(2)}+m-1-\beta}\ \sum_{s=0}^{k_j-1} C_{m-\gamma}^s(j), & t_j^{(2)}\le h_j\beta< t_j^{(2)}+mh_j.\end{cases}$$

Искомый функционал (1) построен.

Особенность этого функционала заключается в том, что он аннулирует точечные функционалы по малым участкам $\left[t_j^{(1)}, t_j^{(2)}\right]$ и заменяет их функционалами с шагами h_j.

Рассмотрим одномерный случай.

Пусть $F(x)$ – модельная функция, характеризующая свойства подкласса функций $B_F=\left\{f\in C^m\right\}$, удовлетворяющая для всего подкласса B_F условиям

$\left|f^{(m)}\right|\le F(x)$ на отрезке $[0,1]$,

$x=\varphi(t)$ – непрерывная дифференцируемая функция

$$\varphi(0)=0 \text{ и } \varphi(1)=1$$

и $t=t(x)$ – обратная функция к функции $x=\varphi(t)$;

$$t(0)=0 \text{ и } t(1)=1.$$

Пусть отрезок $[0,1]$ разбит на части $[x_\beta, x_{\beta+1}]$, $\beta = 0,\ 1,\ \ldots,\ N$, $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_N = 1$.

Очевидно,

$$x_{\beta+1} - x_\beta = \varphi\left(\frac{\beta+1}{N}\right) - \varphi\left(\frac{\beta}{N}\right) = \varphi'\left(\frac{\beta+1}{N}\right)\frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \text{ при } N \to \infty$$

и

$$\max_{[x_\beta, x_{\beta+1}]} \left| f^{(m)}(x) \right| \le \max_{\Delta_\beta} F(x) = F(x_{\beta+1}) + o(1) = F\left(\varphi\left(\frac{\beta+1}{N}\right)\right) + o(1).$$

Рассмотрим интеграл и квадратурную формулу

$$J(f) = \int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N-1} J_j(f) = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{x_\beta}^{x_{\beta+1}} f(x)\,dx$$

и

$$S(f) = \sum_{j=1}^{N-1} S_j(f) \tag{2}$$

с остаточным членом

$$J(f) - S(f) = \sum_{j=1}^{N-1} B_0 \max_{x\in\Delta_\beta} \left| f^{(m)}(x) \right| h^m,$$

где $h = \dfrac{1}{N}$.

В результате преобразований получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\left(t'(\varphi)\right)^{m+1}} F(\varphi) \right) = 0 \text{ или } F(\varphi)\left(\varphi'(t)\right)^{m+1} = const. \tag{3}$$

Общее решение этого уравнения зависит от двух произвольных постоянных C_0 и C_1.

В формуле (3) переходим к старым переменным x:

$$\left[t'(x)\right]^{-(m+1)} F(x) = C_0 \text{ или } t'(x) = C_0 F^{\frac{1}{m+1}}(x).$$

Отсюда имеем

$$t(x) = C_0 \int_0^x F^{\frac{1}{m+1}}(x)\,dx + C_1.$$

Значения постоянных C_0 и C_1 определяются из начальных условий $t(0)=0$ и $t(1)=1$.

Решение уравнения (3) принимает вид:

$$t(x) = \frac{\int_0^x F^{\frac{1}{m+1}}(x)\,dx}{\int_0^1 F^{\frac{1}{m+1}}(x)\,dx}. \tag{4}$$

Из приведенных выше рассуждений следует следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $f \in B_F \subset W_\infty^m$, $x = \varphi(t)$ *– непрерывная дифференцируемая функция,* $\varphi(0)=0$ *и* $\varphi(1)=1$ *и* $t = t(x)$ *– обратная функция к* $\varphi(t)$, $t(0)=0$, $t(1)=1$ *и* $Sf = \sum_{j=1}^{N} S_j f$ *– квадратурная формула с остаточным членом*

$$R = \frac{1}{N^n} \int_0^1 \left[\varphi'(t)\right]^{m+1} B_0 F\left[\varphi(t)\right] dt + o(1),$$

то при $N \to \infty$ асимптотически оптимальное распределение узлов x_β формулы (2) выражается формулой (4).

Формула (3) дает равенство оценок погрешностей на элементарных отрезках интегрирования при оптимальном распределении узлов.

Такой подход позволяет оценить функционалы погрешности на малых участках, в этом заключается отличие от работы Л.В. Войтишек [2].

Рассмотрим *n*-мерный случай.

Построенные функционалы используются для вычисления *n*-кратных интегралов для *n*-мерного куба и в этом направлении вычисления интегралов обобщают исследования Л.В. Войтишек.

Интеграл по кубу Δ сводится к вычислению интегралов

$$\int_{\Delta}\varphi(x)\,dx=\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\dots\int_0^1\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_n\cdot$$

По индукции имеем

$$\int_{\Delta}\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta_1=0}^{N}\sum_{\beta_2=0}^{N}\dots\sum_{\beta_n=0}^{N}h^n\varphi(h\beta_1,h\beta_2,\dots h\beta_n).$$

Пусть $\frac{1}{N}=h$ и

$$\int_0^1\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{m-1}hD_\beta\varphi(h\beta)+\sum_{\beta=m}^{N-m}h\varphi(h\beta)+\sum_{\beta=N-(m-1)}^{N}hD_\beta\varphi(h\beta),$$

где $D_\beta=\sum_{\gamma=0}^{\beta}C_\gamma$ и C_γ определяются из системы

$$\sum_{\gamma=0}^{m}C_\gamma\gamma^\alpha=\frac{1}{\alpha+1},\quad \alpha=0,\ 1,\ \dots,\ m+1.$$

По методу С.Л. Соболева построим кубатурную формулу с симметричным пограничным слоем для куба Δ:

$$\int_{\Delta}\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta_1=0}^{N}\sum_{\beta_2=0}^{N}\dots\sum_{\beta_n=0}^{N}D_{\beta_1}D_{\beta_2}\dots D_{\beta_n}h^n\varphi(h\beta_1,h\beta_2,\dots h\beta_n).$$

Приступим к построению кубатурных формул с переменным шагом интегрирования для *n*-мерного куба.

Пусть Δ – *n*-мерный куб, $\frac{1}{\mathrm{N}}=h,$ $\Delta_j\in\Delta$ – прямоугольные *n*-мерные параллелепипеды, $j=1,\ 2,\ \dots,\ k,$ с вершинами в узлах решетки с шагом h с длинами ребер b_j-a_j, $j=1,\ 2,\ \dots,\ k,$ где a_j и b_j принадлежат решетке с шагом h_j.

Пусть $\Delta_0=\Delta\setminus\cup\Delta_j$ и $l_\Delta^h(x)$ – функционал с симметричным пограничным слоем для Δ.

Построим точечный функционал с пограничным слоем путем суммирования точечных функционалов, построенных выше, с шагом h_j вдоль положительных направлений осей координат. В результате получаем односторонний пограничный слой вдоль Δ_j – *n*-мерного параллелепипеда.

Тогда искомый функционал $l_\Delta^h(x)$ имеет вид

$$l_\Delta^h(x)=\varepsilon_\Delta(x)-\sum_{j=0}^{k}l_{\Delta_j}^{h_j}(x),$$

где $l_{\Delta_j}^{h_j}(x)$ – функционал с шагом h_j с точечным пограничным слоем вдоль координатных осей для области Δ_j.

Минимизируя норму этого функционала в пространстве $W_p^m(E_n)$ при определенных условиях, указанных в лемме 1, находим лучший размер сетки.

Таблица 1

Результаты вычисления интеграла $\int_0^1\int_0^1 (x_1^2+x_2^2)dx_1dx_2$

m	h	Результат	Погрешность
2	0,01	0.66666699999	0.00000033332
2	0,0001	0.66666666658	0.00000000009
3	0,01	0.66666666666	0
3	0,0001	0.66666666644	0.00000000023
4	0,01	0.66666666665	0.00000000002
4	0,0001	0.66666666663	0.00000000003
5	0,01	0.66666666663	0.00000000003
5	0,0001	0.66666666660	0.00000000006
10	0,01	0.66666666672	0.00000000006
10	0,0001	0.66666666659	0.00000000007

Точный результат – 2/3.

Таблица 2

Результаты вычисления интеграла $\int_0^1\int_0^1 (e^{x_1}+e^{x_2})dx_1dx_2$

m	h	Результат	Погрешность
2	0,01	3.43656396630	0.00000030936
2	0,0001	3.43656365160	-0.00000000529
3	0,01	3.43656365780	0.00000000088
3	0,0001	3.43656365130	-0.000000000567
4	0,01	3.43656365690	-0.00000000002
4	0,0001	3.43656365150	-0.00000000541
5	0,01	3.43656365700	0.00000000004
5	0,0001	3.43656365120	-0.00000000570
10	0,01	3.43656365700	0.00000000008
10	0,0001	3.43656365260	-0.00000000427

Точный результат – $2(e-1)$.

По результатам расчета определенных интегралов с использованием оптимального выбора размера сетки в зависимости от поведения функции видно, что погрешность появляется в 7-10 знаках после запятой.

Статья выполнена при поддержке государственного задания МОиН РФ высшим учебным заведениям на 2012 -2014 гг. на выполнение НИР, регистрационный номер проекта: 1.926.2011.

Библиография

1. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.

2. *Войтишек Л.В.* Об одном частном случае построения кубатурных формул с пограничным слоем // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – Т.9, №2. – С. 417–419.

3. *Санеева Л.И.* О некоторых кубатурных формулах для областей с гладкими границами. – Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 110 с.

4. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

5. *Шойнжуров Ц.Б.* Оценка нормы функционала погрешности кубатурных формул в различных функциональных пространствах. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. – 247 с.

Bibliography

1. *Bakhvalov N.S.* Numerical methods. – M.: Nauka, 1973. – 631 p.

2. *Voitishek L.V.* A special case of the cubature formulas creating with a boundary layer // Zhurnal Vychislitelnoy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki. – 1969. – Vol. 9, N 2. – P. 417–419.

3. *Saneeva L.I.* About some cubature formulas for areas with smooth borders. – LAP LAMBERT Academic Publishing house, 2011. – 110 p.

4. *Sobolev S.L.* Introduction to the theory of cubature formulas. – M.: Nauka, 1974. – 808 p.

5. *Shoynzhurov Ts.B.* Evaluation of the norm of the cubature functional error in different functional spaces. – Ulan-Ude: BSC Publishing house of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science, 2005. – 247 p.