

О.В. Репецкий, д-р техн. наук, проф.
Восточно-Сибирский институт экономики и права, г. Иркутск
До Мань Тунг, аспирант
Иркутская государственная сельскохозяйственная академия, г. Иркутск

УДК 534.1: 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ РАССТРОЙКИ ПАРАМЕТРОВ НА ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДИСК-ЛОПАТКИ ТУРБОМАШИН НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ УМЕНЬШЕННОГО ПОРЯДКА

В работе представлены вопросы математического моделирования и решения задач вынужденных колебаний диск-лопатки с расстройкой методом конечных элементов на основе модели уменьшенного порядка. Исследовано влияние расстройки параметров лопаток на резонансы колебаний.

Ключевые слова: расстройка, вынужденные колебания, метод конечных элементов, модель уменьшенного порядка.

O.V. Repetskiy, D.Sc. Engineering, Prof.
Do Manh Tung, P.G.

NUMERICAL ANALYSIS OF FORCED VIBRATIONS OF MISTUNED BLADED DISKS SYSTEMS OF TURBOMACHINES USING REDUCED-ORDER MODEL

This paper provides information on the mathematical modeling and solutions of the forced vibrations of mistuned bladed disks using reduced order model by finite element method. The authors give influence of mistuning parameters on the resonance vibrations.

Key words: Mistuning, forced vibrations, finite element method, reduced-order model.

Введение

При изучении колебаний роторов турбомашин известно, что у реальных конструкций при их изготовлении или эксплуатации всегда возникают случайные отклонения между лопатками (по массе, модулю...). Эти отклонения называются расстройкой. Расстройка сильно воздействует на отклик вынужденных колебаний. В зависимости от рабочих условий и уровня расстройки ограничение энергии на несколько лопаток может привести к повышению максимальных амплитуд и напряжений лопаток. Анализ влияния расстройки на вынужденные колебания показан в нескольких работах. В таблице 1 [5, 6, 8, 9] представлен максимальный коэффициент увеличения амплитуды колебаний.

Таблица 1

Год	Автор	Число лопаток N	$\frac{\text{максимальный отклик с расстройкой}}{\text{отклик без расстройки}}$
1976	Whitehead [9]	24	$\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{N}{2}} \right) = 2,23$
1976	Ewins [5]	24	1,21
1975	El-Bayoumy and Srinivasan [6]	24	1,20
1984	Macbain and Whaley [8]	-	1,20

Авторы применяли статистический анализ, чтобы исследовать вынужденные колебания рабочих колес с расстройкой. Но этот метод сложно использовать для конечных элементов системы лопаток (рис. 1а).

В статье представлена методика расчета модели уменьшенного порядка (МУП) для анализа рабочих колес с расстройкой на основе одного сектора методом конечных элементов (МКЭ) (рис. 1б).

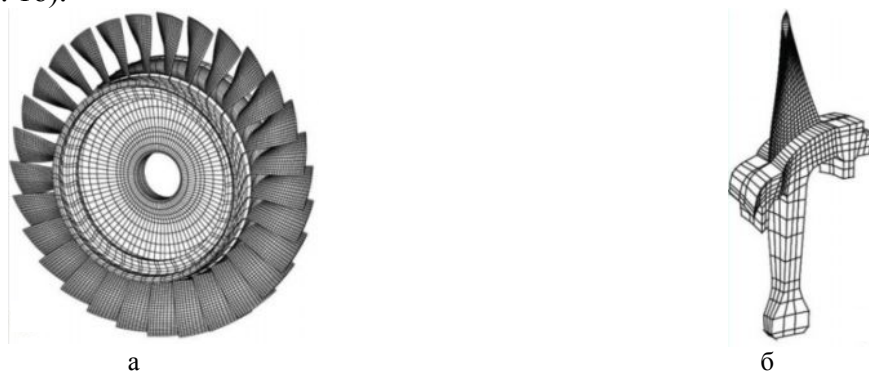


Рис. 1. Модель конечных элементов рабочих колес: а – полный диск; б – один типичный сектор

Реализация расстройки

Расстройка моделируется путем изменения жесткостей каждой лопатки. Когда матрица жесткости каждой консольной лопатки разлагается на диагональную форму K_b , тогда расстройка жесткости каждой консольной лопатки ΔK_b вводится как [3]

$$\Delta K_b = B \underset{n=1, \dots, N}{diag} \left[\underset{k=1, \dots, m_b}{diag} \Delta f_n^k \right] K_b, \quad (1)$$

где $B \underset{n=1, \dots, N}{diag}$ – блочно-диагональная матрица; $\underset{k=1, \dots, m_b}{diag}$ – диагональная матрица; m_b – число форм колебаний консольной лопатки; N – число лопаток; Δf_n^k – расстройка параметров, соответствующая k -ной форме колебаний n -ной консольной лопатки, определяемая как

$$\Delta f_n^k = \left(\frac{\bar{\omega}_n^k}{\omega^k} \right)^2 - 1, \quad (2)$$

здесь $\bar{\omega}_n^k$ – расстроенная частота k -ной формы колебаний n -ной консольной лопатки и ω^k – настроенная частота k -ной формы n -ной лопатки.

В большинстве опубликованных исследований по расстройке системы диск-лопатки рассмотрены изменения модуля упругости как исходные данные расстроенных лопаток. Если материал каждой лопатки однороден, то расстроенный параметр Δf_n^k в уравнении (1) заменяется значением Δf_n^f , которое обозначает изменение номинального модуля упругости.

Общая схема моделей уменьшенного порядка

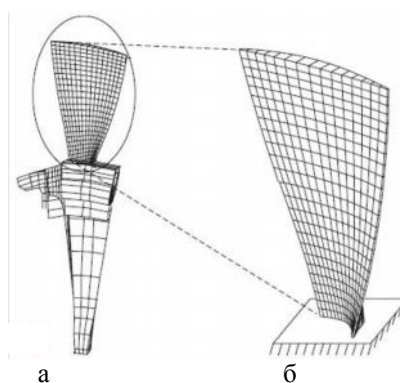


Рис. 2. Компоненты форм одного сектора: а – циклические формы для одного сектора диск-лопатки; б – нормальные формы одной консольной лопатки

Предположим, что степени свободы упорядочены так, чтобы дать блочно-диагональные формы при сборке матриц масс и жесткости всей конструкции. Они представлены в виде [3]

$$M = \begin{bmatrix} M_d & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \otimes \tilde{M}_d & 0 \\ 0 & I \otimes \tilde{M}_b \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_d & 0 \\ 0 & K_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \otimes \tilde{K}_d & 0 \\ 0 & I \otimes \tilde{K}_b \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где I – единичная матрица размера N ; N – число секторов, \tilde{M}_d, \tilde{K}_d – матрицы масс и жесткости одного сектора диска; \tilde{M}_b, \tilde{K}_b – матрицы масс и жесткости одной лопатки, символ \otimes обозначает оператор Кронекера, определенный в приложении А.

На рисунке 2 изображены два основных компонента форм колебаний для модели конечных элементов одного сектора диск-лопатки. Первая часть включает в себя формы колебаний одной лопатки, защемленной между диском и лопаткой (рис. 2б). Для колес без полки модальная матрица δ^b N идентичных лопаток является блочно-диагональной и собрана как $I \otimes \tilde{\delta}^b$, где $\tilde{\delta}^b$ – форма колебаний одной консольной лопатки. Вторая часть представляет собой формы колебаний диска, которые являются циклическими формами полной сборки, где к диску присоединены безмассовые лопатки (рис. 2а). Часть форм колебаний диска с лопаткой принадлежит степеням свободы лопатки и обозначается δ^d , а часть диска – \mathcal{G}^d . После совмещения двух частей компонентов форм колебаний получим перемещения всей структуры в виде [4]

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G}^d \\ \delta^d \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta^b \end{bmatrix} b, \quad (4)$$

где a – вектор обобщенных координат диска для всех форм и $a = [a_0^T \ a_1^T \ \dots \ a_P^T]^T$; a_n – один вектор обобщенных координат, соответствующих n узловым диаметрам диска; P – максимальное число гармоник или максимальное число узловых диаметров; b – вектор обобщенных координат для всех N лопаток и $b = [b_0^T \ b_1^T \ \dots \ b_N^T]^T$, где b_i – вектор обобщенных координат i -ной лопатки.

Кинетическая энергия системы может быть записана как [7]

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P \dot{a}_n^T \dot{a}_n + \frac{1}{2} \dot{b}^T \dot{b} + \dot{b}^T \delta^{b^T} M_b \sum_{n=0}^P \delta_n^d \dot{a}_n + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^P \dot{a}_n^T \delta_n^{d^T} \right) M_b \delta^b \dot{b} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P \left(\dot{a}_n^T \delta_n^{d^T} \right) M_b \sum_{m=0}^P \left(\delta_m^d \dot{a}_m \right). \quad (5)$$

Аналогично энергия деформации системы может быть выражена как

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P a_n^T \mathcal{K}_{dn} a_n + \frac{1}{2} b^T \delta^{b^T} K_b \delta^b b + \frac{1}{2} b^T \delta^{b^T} K_b \sum_{n=0}^P \delta_n^d a_n + \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^P a_n^T \delta_n^{d^T} \right) K_b \delta^b b + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^P \left(a_n^T \delta_n^{d^T} \right) K_b \sum_{m=0}^P \left(\delta_m^d a_m \right). \quad (6)$$

Применяем принцип Гамильтона

$$\int_{t_1}^{t_2} [dU - dT] dt = \int_{t_1}^{t_2} dW_{Внеш} dt, \quad (7)$$

где внешняя работа определена как

$$\int_{t_1}^{t_2} dW_{Внеш} dt = \int_{t_1}^{t_2} d \left[\delta^d a + \delta^b b \right]^T F dt - \int_{t_1}^{t_2} da^T \delta^{d^T} F dt + \int_{t_1}^{t_2} db^T \delta^{b^T} F dt, \quad (8)$$

а F – соответственно вектор вынужденной силы степеней свобод всех лопаток при сборке.

Из выражений (3–8) имеем уравнение в виде матрицы

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_d + \delta^{d^T} M_b \delta^d & \delta^{d^T} M_b \delta^b \\ \delta^{b^T} M_b \delta^d & I_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag} [2\xi^k] \otimes \sqrt{\mathcal{K}_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} \\ & + (1 + \gamma j) \begin{bmatrix} \mathcal{K}_d & \delta^{d^T} K_b \delta^b \\ \delta^{b^T} K_b \delta^d & \text{Bdiag} \left[\text{diag} (1 + \Delta f_n^k) \right] \mathcal{K}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta^{d^T} F \\ \delta^{b^T} F \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (9)$$

где I_d, \mathcal{K}_d – соответственно матрицы масс и жесткости диска в размере $Nm_d \times Nm_d$, когда все формы с матрицей масс нормированы; m_d – число форм колебаний диска; I_b, \mathcal{K}_b – соответственно матрица масс и жесткости N лопаток в размере $Nm_b \times Nm_b$, когда все формы с матрицей масс нормированы; ξ^k – коэффициент вязкого демпфирования; γ – коэффициент демпфирования структуры.

Определение циклических форм колебаний [3, 7]

Матрица, представляющая собой циклические формы колебаний, определена как

$$\mathcal{G}^d = (\bar{F} \otimes I) \tilde{\mathcal{G}}^d, \quad (10)$$

где \bar{F} – реальная матрица Фурье (см. приложение Б); I – единичная матрица размера N ; $\tilde{\mathcal{G}}^d$ – форма колебаний одного сектора в циклических координатах, имеющая блочно-диагональную структуру и определена как

$$\tilde{\mathcal{G}}^d = \text{Bdiag} \tilde{\mathcal{G}}_k^d, \quad (11)$$

где $\tilde{\mathcal{G}}_k^d = \tilde{\mathcal{G}}_{k,c}^d + j \tilde{\mathcal{G}}_{k,s}^d$ – форма колебаний одного сектора, соответствующая k узловым диаметров; $\tilde{\mathcal{G}}_{k,c}^d, \tilde{\mathcal{G}}_{k,s}^d$ – соответственно реальная и мнимая часть $\tilde{\mathcal{G}}_k^d$ и $j = \sqrt{-1}$.

Из выражений (10) и (11) можно получить форму колебаний в циклических координатах как

$$\tilde{\mathcal{G}}^d = \left[\bar{f}_0 \otimes \tilde{\mathcal{G}}_0^d \quad \bar{f}_1^c \otimes \tilde{\mathcal{G}}_{1,c}^d + \bar{f}_1^s \otimes \tilde{\mathcal{G}}_{1,s}^d, \dots, \bar{f}_k^c \otimes \tilde{\mathcal{G}}_{k,c}^d + \bar{f}_k^s \otimes \tilde{\mathcal{G}}_{k,s}^d, \dots, \bar{f}_{N/2} \otimes \tilde{\mathcal{G}}_{N/2}^d \right]. \quad (12)$$

Определение возбуждающей силы [7]

Возбуждающие силы – гармонические функции времени, отличающиеся фазой между секторами. Фаза i -ной лопатки определена как

$$\Phi_i = \frac{2\pi C(i-1)}{N}, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (13)$$

где C – порядок энергии возбуждений.

Вектор внешней возбуждающей силы представлен в виде

$$F = \left\{ f e^{j\Phi_1} \quad f e^{j\Phi_2} \quad \dots \quad f e^{j\Phi_N} \right\}^T \sqrt{N} e_{C+1} \otimes f, \quad (14)$$

где e_{C+1} – $(C+1)$ -й столбец матрицы Фурье в приложении Б; f – вектор вынужденной силы одной лопатки.

Из выражений (9) и (14) имеем

$$F = \left\{ F_d^T : F_b^T \right\} = \left\{ 0 \quad \dots \quad 0 \quad F_d^{C^T} \quad 0 \quad \dots \quad 0 : F_b^T \right\}^T, \quad (15)$$

$$F_d^C = \delta^{d^T} F = \sqrt{N} \left\{ \begin{array}{c} (\bar{f}_0 \otimes \tilde{g}_0^d)(e_{C+1} \otimes f) \\ (\bar{f}_1^c \otimes \tilde{g}_{1,c}^d + \bar{f}_1^s \otimes \tilde{g}_{1,s}^d)(e_{C+1} \otimes f) \\ \vdots \\ (\bar{f}_k^c \otimes \tilde{g}_{k,c}^d + \bar{f}_k^s \otimes \tilde{g}_{k,s}^d)(e_{C+1} \otimes f) \\ \vdots \\ (\bar{f}_{N/2} \otimes \tilde{g}_{N/2}^d)(e_{C+1} \otimes f) \end{array} \right\}, \quad (16)$$

$$F_b = \delta^{b^T} F \quad \sqrt{N} e_{C+1} \otimes (\tilde{\delta}^{b^T} f). \quad (17)$$

Численные результаты модели уменьшенного порядка

Евклидова норма перемещений. Скалярное выражение, оценивающее отклонение амплитуды лопаток, определено для вынужденных колебаний как

$$\bar{\delta}_n = \sqrt{\sum_{j=1}^{N_b} \delta_{j,n}^2}, \quad (n=1, \dots, N), \quad (18)$$

где $\bar{\delta}_n$ – Евклидова норма перемещений лопаток; N_b – число степеней одной лопатки; $\delta_{j,n}$ – перемещение j -ной степени n -ной лопатки.

Для настроенной системы пик нормы перемещений всех лопаток одинаков, но это не так для расстроенной системы. Мы рассмотрим максимальное значение нормы перемещений лопаток в следующем примере.

Тестовый пример. В качестве примера рассмотрим модельное рабочее колесо, содержащее 24 лопатки. Геометрические размеры и характеристики материала рассчитываемой конструкции: внутренний радиус 0,0135 м, внешний радиус 0,06 м, толщина диска и лопатки 0,002 м, длина лопатки 0,036 м, ширина 0,012 м, модуль упругости материала 210 ГПа, плотность 7850 кг/м³, коэффициент Пуассона 0,3. Возбуждающие силы приложены на все узлы пика каждой лопатки, коэффициент демпфирования структуры $\gamma=0,6\%$.

Расстройка параметров. Модель конечных элементов с расстройкой параметров состоит из всей сборки лопаток. Расстройка вводится путем изменения модуля упругости лопаток. Тогда модуль упругости i -ной лопатки может быть определен как

$$E_i = (1 + \Delta f_i) E_0, \quad (19)$$

где E_0 – модуль упругости лопатки без расстройки.

Параметры расстройки приведены в таблице 2 [3].

Таблица 2

Лопатка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Δf_i (%)	-0,52	-1,87	-1,82	-0,39	-5,01	-0,85	1,42	7,62	2,93	2,72	2,77	-4,92
Лопатка	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Δf_i (%)	-8,07	-4,91	5,93	-6,92	-0,41	0,43	1,84	-5,47	2,39	3,81	4,11	3,92

Конечноэлементная модель сектора диск-лопатки на основе треугольных конечных элементов STI218 [1, 2] содержит 174 степени свободы. Результаты расчета собственных частот диск-лопатки без расстройки и с расстройкой приведены на рисунках 3–5 в виде частотной диаграммы и в таблице 3.

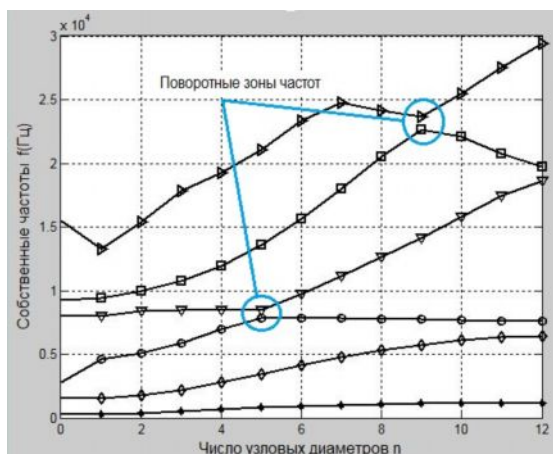


Рис. 3. График собственных частот диск-лопатки без расстройки

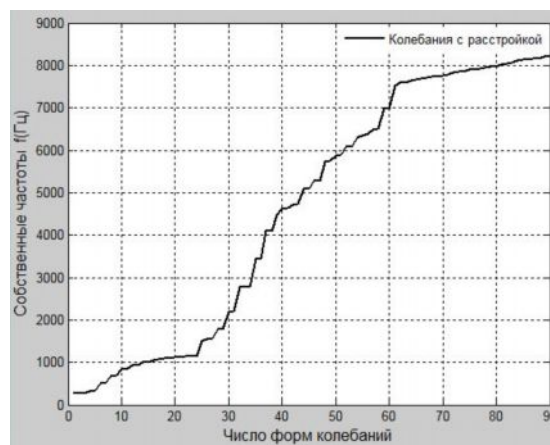


Рис. 4. График собственных частот диск-лопатки с расстройкой

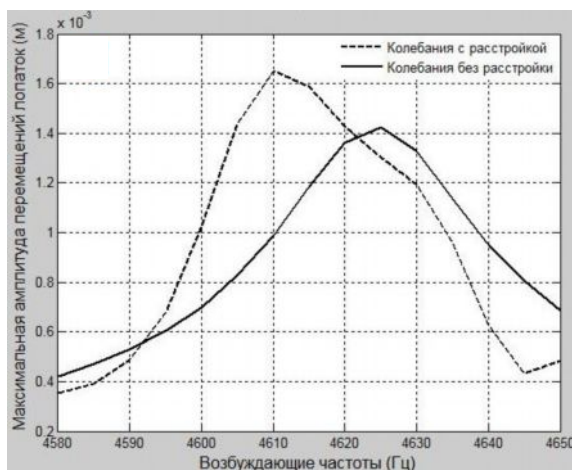
Таблица 3
Сопоставление расчетных и экспериментальных значений частот собственных колебаний модельного диска без расстойки [1]

n	m=0			m=1			m=2		
	МКЭ	эксп.	Δf (%)	МКЭ	эксп.	Δf (%)	МКЭ	эксп.	Δf (%)
0	267	265	0,57	1497	1386	8	2764	-	-
1	261	210	24	1559	1362	14	4624	4281	8
2	329	340	-3,3	1780	1723	3,3	5089	4950	4,9
3	504	501	0,6	2200	2109	4,3	5880	5820	1
4	685	681	0,6	2781	2714	2,5	6980	6812	2,5
5	828	803	3,1	3437	3452	-0,4	7850	7021	11
6	934	922	1,3	4100	4102	0	7864	-	-
7	1012	938	7,9	4727	4738	-0,2	7832	-	-
8	1067	961	11	5282	5112	3,3	7787	-	-
9	1106	1008	9,7	5743	5513	4,2	7731	-	-
10	1132	1027	10	6094	5983	1,86	7671	-	-
11	1147	1030	11	6318	6212	1,71	7620	-	-
12	1151	1032	11,5	6397	6221	2,83	7599	-	-

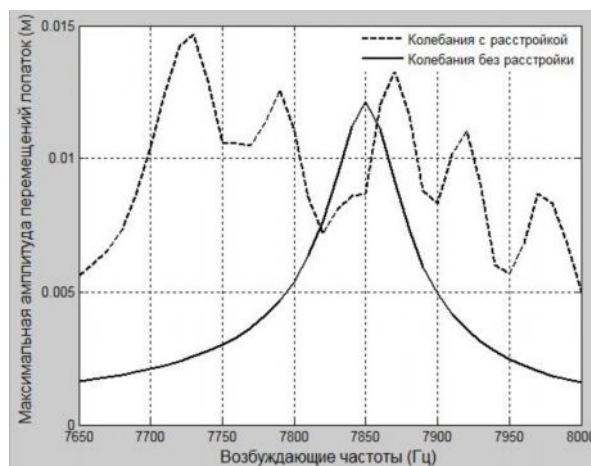
Максимальная амплитуда перемещений лопаток, соответствующая порядкам энергии возмущения $C=1$ и $C=5$, выражена на рисунке 5.

Вывод

На рисунках 5а и 5б дан анализ влияния расстройки модуля упругости лопаток на резонансы колебаний. В общем амплитуды колебаний диск-лопатки с расстройкой повышаются. Особенно в поворотных зонах частот они сильно и сложно изменяются (рис. 5б). Эти результаты совпадают с работами, которые опубликованы авторами J.R. Bladh [3], D.J. Ewins [5], M. Kruse [7] и др., и позволяют решать задачи повышений прочности рабочих колес с расстройкой при проектировании.



а



б

Рис. 5. График максимальных значений отклика вынужденных колебаний: а – $C=1$; б – $C=5$

Использование МУП дает возможность по-новому подойти к исследованию колебаний рабочих колес с расстройкой, что снижает трудоемкость и численные затраты времени на ЭВМ.

Библиография

1. Борискин О.Ф., Кулибаба В.В., Репецкий О.В. Конечноэлементный анализ колебаний машин. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 1989. – 144 с.
2. Репецкий О.В., До Мань Тунг. Математическое моделирование и численный анализ колебаний идеальных циклически-симметричных систем методом конечных элементов // Известия ИГЭА. – 2012. – №3. – С. 149–153.
3. Bladh J.R., Castanier M.P., Pierre C. Component-Mode-Based Reduced order modeling techniques for Mistuned bladed Disks – Part I, II: Application // Journal of Engineering for Gas turbines and Power. – January 2001. – Vol. 123, N 8. – P. 89–108.
4. Craig R.R., Mervyn C C., Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses // AIAA Journal. – 1968. – N 7. – P. 1313–1319.
5. Ewins D.J. Vibration modes of mistuning bladed disks // Journal of Engineering for power. – 1976. – N 7. – P. 349–355.
6. El-Bayoumy L.E., Srinivasan A.V. Influence of Mistuning on Rotor-blade vibration // AIAA Journal. – 1975. – N 4. – P. 460–464.
7. Kruse M., Pierre C. Forced response of mistuned bladed disks using reduced-order modeling // AIAA Journal. – 1996. – P. 1938–1950.
8. Macbain J.C., Whaley P.W. Maximum resonant response of mistuned bladed disks // Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design. – 1984. – Vol. 106. – P. 218–223.
9. Whitehead D.S. Effect of mistuning on forced vibration of blades with Mechanical coupling // Journal of mechanical science. – 1976. – N 6. – P. 306–307.

Bibliography

1. Boriskin O.F., Kulibaba V.V., Repetsky O.V. Finite element analysis of the vibration machines. – Irkutsk: ISTU, 1989. – 144 p.
2. Repetsky O.V., Do Manh Tung. Mathematical modeling and numerical analysis of vibrations of ideal cyclic symmetric systems using Finite Element Methods // Journal ISEA. – 2012. – N3. – P. 149-153.
3. Bladh J.R., Castanier M.P., Pierre C. Component-Mode-Based Reduced order modeling techniques for Mistuned bladed Disks. – Part I, II: Application // Journal of Engineering for Gas turbines and Power. – January 2001. – Vol. 123, N 8. – P. 89–108.
4. Craig R.R., Mervyn C.C., Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses // AIAA Journal. – 1968. – N 7. – P. 1313–1319.

5. *Ewins D.J.* Vibration modes of mistuning bladed disks // *Journal of Engineering for power.* – 1976. – N 7. – P. 349–355.
6. *El-Bayoumy L.E., Srinivasan A.V.* Influence of Mistuning on Rotor-blade vibration // *AIAA Journal.* – 1975. – N 4. – P. 460–464.
7. *Kruse M., Pierre C.* Forced response of mistuned bladed disks using reduced-order modeling // *AIAA Journal.* – 1996. – P. 1938–1950.
8. *Macbain J.C., Whaley P.W.* Maximum resonant response of mistuned bladed disks // *Journal of vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design.* – 1984. – Vol. 106. – P. 218–223.
9. *Whitehead D.S.* Effect of mistuning on forced vibration of blades with Mechanical coupling // *Journal of mechanical science.* – 1976. – N 6. – P. 306–307.

Приложение А

Оператор Кронекера

Оператор Кронекера двух матриц определен в виде

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1N}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2N}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}B & a_{N2}B & \dots & a_{NN}B \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Свойства оператора Кронекера

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD); \quad (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}; \quad (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T. \quad (21)$$

Приложение Б

Матрица Фурье

Матрица Фурье размера N имеет вид

$$E = [e_{ki}], \quad e_{ki} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\alpha(i-1)(k-1)}, \quad (k, i = 1, \dots, N), \quad j = \sqrt{-1} \text{ и } \alpha = 2\pi / N. \quad (22)$$

Тогда реальные значения матрицы определены в виде

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_1^c & \bar{f}_1^s & \dots & \bar{f}_n^c & \bar{f}_n^s & \dots & \bar{f}_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \alpha & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin \alpha & \dots & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos 2\alpha & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin 2\alpha & \dots & \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}} \cos(N-1)\alpha & \sqrt{\frac{2}{N}} \sin(N-1)\alpha & \dots & \frac{(-1)^{N-1}}{\sqrt{N}} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

где последний столбец существует только для четных N.